General Physics I

เวกเตอร์
Vector

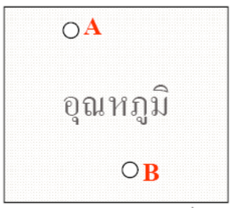
นายสมควร โพธารินทร์
ห้องพัก ๖ – ๒๐๓/๑
E-mail; sky_ubu@hotmail.com
Tel. ; ๐๘ - ๕๔๑๗ - ๘๘๕๗
หมวดวิชาฟิสิกส์ สาขาวิชาวิทยาศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตเฉลิมพระเกียรติ จังหวัดสกลนคร

เวกเตอร์และสเกลาร์

ปริมาณต่างๆ ในวิชาฟิสิกส์แบ่งเป็น 2 ประเภท คือ

ปริมาณสเกลาร์ (Scalar Quantity)

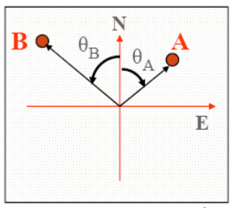
ปริมาณที่ระบุเพียงขนาดและหน่วย ก็ได้ความสมบูรณ์ เช่น มวล (kg) พื้นที่ (m^2) ความถี่ (Hz) เวลา (s) อุณหภูมิ (K) เป็นต้น



ปริมาณสเกลาร์

ปริมาณเวกเตอร์ (Scalar Quantity)

ปริมาณที่ต้องระบุทั้งขนาด และทิศทาง จึงได้ความสมบูรณ์ เช่น การกระจัด ความเร็ว ความเร่ง แรง เป็นต้น

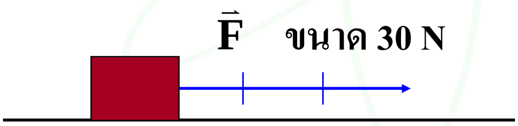


ปริมาณเวกเตอร์

สัญลักษณ์เวกเตอร์

ปริมาณเวกเตอร์ โดยทั่วไป**เขียนด้วยลูกศร**ที่มีความยาวเท่ากับขนาดของเวกเตอร์ และ**มีทิศเดียวกับเวกเตอร์**บนลูกศรจะ**มีอักษรย่อกำกับ**ว่าเป็นเวกเตอร์ของปริมาณใด เช่น

มีแรง $\vec{F}$ ขนาด 30 N กระทำต่อวัตถุทิศขวา



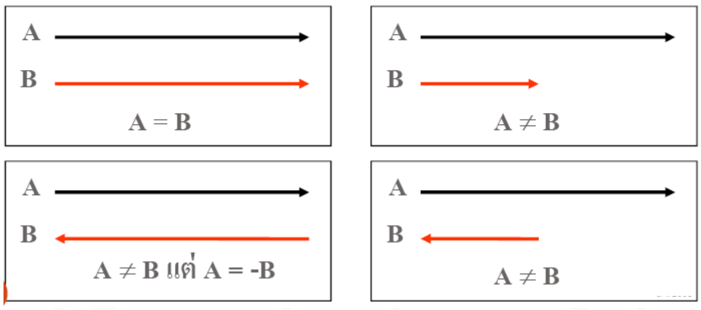
$$|\vec{F}| = 30N$$

คุณสมบัติของเวกเตอร์

<u>สมบัติของเวกเตอร์</u>

การเท่ากันของสองเวกเตอร์

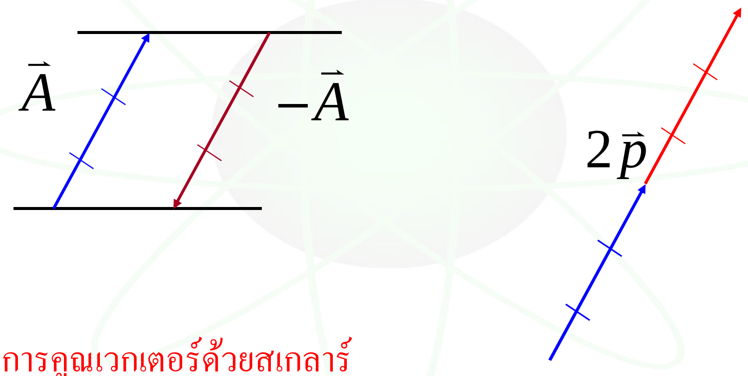
ถ้าเวกเตอร์ A และเวกเตอร์ B เท่ากัน จะต้องมีขนาดเท่ากัน ($A = B$) และมีทิศทางเดียวกันด้วย



คุณสมบัติของเวกเตอร์ (ต่อ)

เวกเตอร์ที่ติดลบ (Negative of a vector)

A + (-**A**) = 0 ➡ เวกเตอร์ **A** และ –**A** มีขนาดเท่ากันแต่มีทิศตรงข้าม



การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

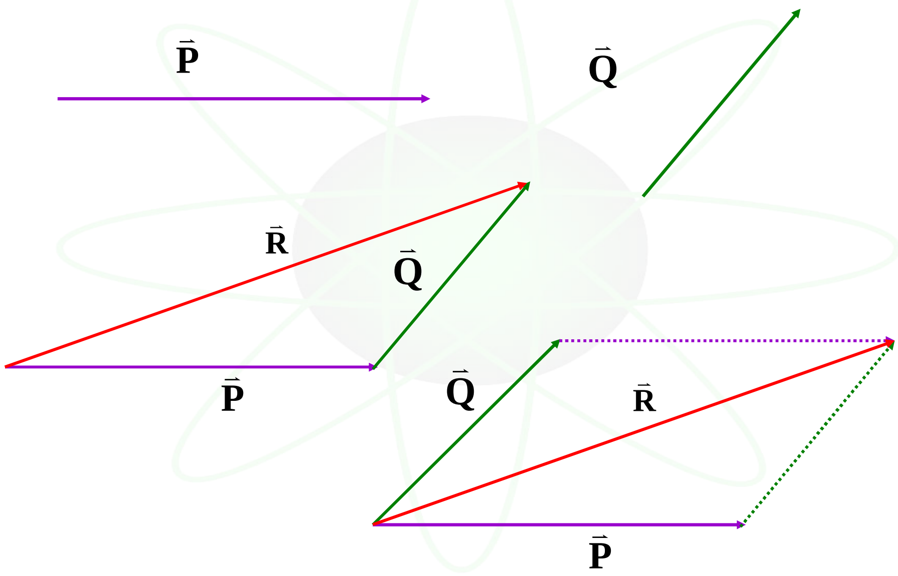
เป็นการเพิ่มขนาดของเวกเตอร์ โดยมีทิศทางเดิม

การบวก-ลบ เวกเตอร์

การบวกเวกเตอร์

การบวกเวกเตอร์ทำได้ **2** วิธี คือ การบวกเวกเตอร์โดย <u>วิธีเขียนรูป</u> และ <u>วิธีคำนวณ</u>

การบวกเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์

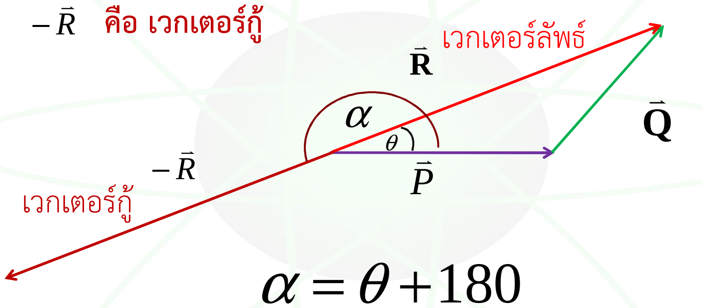


เวกเตอร์ลัพธ์ และเวกเตอร์กู้

เวกเตอร์กู้ จะมีขนาดเท่ากันกับเวกเตอร์ลัพธ์ แต่ทิศทางตรงกันข้าม

$\vec{R}$ คือ เวกเตอร์ลัพธ์

$-\vec{R}$ คือ เวกเตอร์กู้



$$\alpha = \theta + 180$$

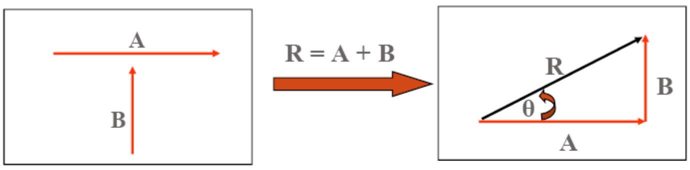
θ คือ มุมของเวกเตอร์ลัพธ์

α คือ มุมของเวกเตอร์กู้

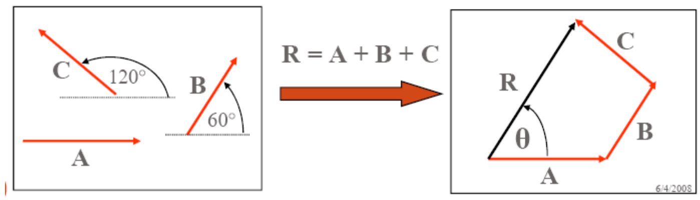
การบวกเวกเตอร์

การบวกเวกเตอร์โดยใช้วิธีเรขาคณิต (geometric method)

• การบวกสองเวกเตอร์



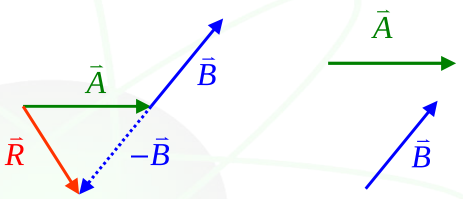
• การบวกเวกเตอร์ที่มีมากกว่าสองเวกเตอร์ขึ้นไป



- การลบ : เป็นการบวกด้วยเวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงกันข้าม

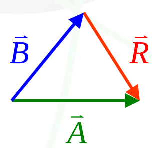
$\vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$

$\vec{R} = \vec{A} + \left(-\vec{B}\right)$



ลากหางต่อหาง เวกเตอร์ลัพธ์ คือ เวกเตอร์ที่ลากจากหัวเวกเตอร์สุดท้ายถึงหัวเวกเตอร์แรก

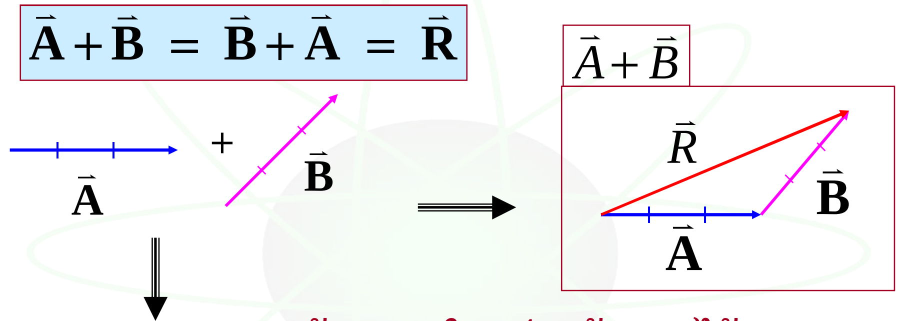
$\vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$

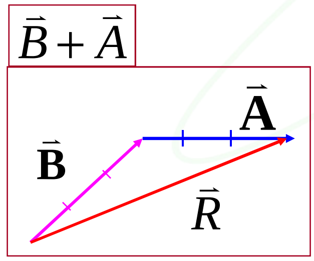


สมบัติการบวกเวกเตอร์

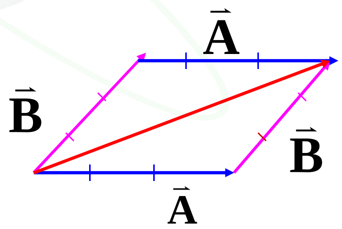
กฎการสลับที่

$$\vec{A}+\vec{B} = \vec{B}+\vec{A} = \vec{R}$$



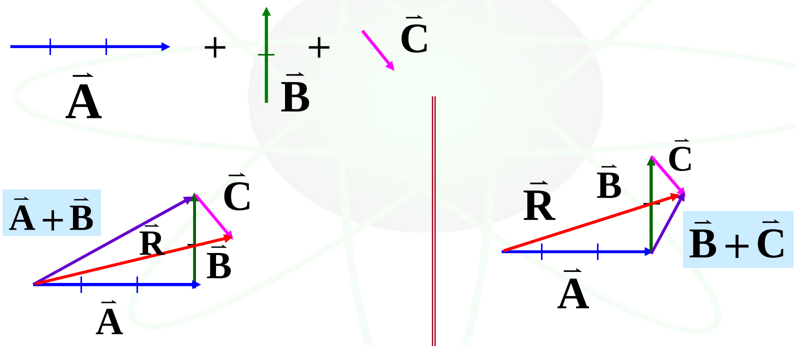


ถ้ายก $\vec{R}$ ในรูปมาซ้อนจะได้



กฎการเปลี่ยนกลุ่ม

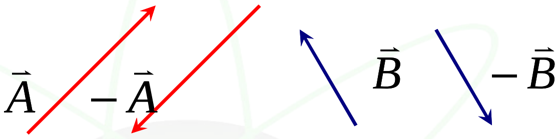
$$\vec{R} = \left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{C} = \vec{A}+\left(\vec{B}+\vec{C}\right)$$



$\vec{R} = \left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{C}$

$\vec{R} = \vec{A}+\left(\vec{B}+\vec{C}\right)$

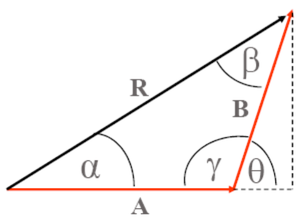
การลบเวกเตอร์



$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B}) \qquad \vec{B}-\vec{A}=\vec{B}+(-\vec{A})$$

$$\vec{A}-\vec{B}\neq\vec{B}-\vec{A}$$

การหาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์



ขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์

$$R^2=(A+B\cos\theta)^2+(B\sin\theta)^2$$
$$R^2=A^2+2AB\cos\theta+B^2\cos^2\theta+B^2\sin^2\theta$$
$$R=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta}$$

เรียกว่า กฎของโคไซน์ (cosine’s law)

ทิศของเวกเตอร์ลัพธ์

$$\tan\alpha=\frac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta}$$
$$\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta}\right)$$

หรือ สามารถหาได้จากกฎของไซน์ sine’s law)

$$\frac{R}{\sin\gamma}=\frac{A}{\sin\beta}=\frac{B}{\sin\alpha}$$

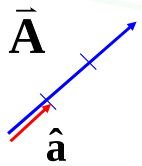
การบวกเวกเตอร์ โดยการคำนวณ

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit vector) คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย และมีทิศเดียวกับเวกเตอร์ที่สนใจ (ใช้สำหรับกำหนดทิศทาง)

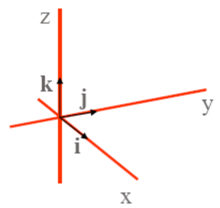
ถ้า $|\vec{A}|$ **เป็นขนาดของเวกเตอร์** $\vec{\mathbf{A}}$

$\hat{\mathbf{a}}$ **เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศเดียวกับ** $\vec{\mathbf{A}}$

จะได้ $\hat{a} = \dfrac{\vec{A}}{|A|}$ **หรือ** $\vec{A} = |A|\hat{a} = A\hat{a}$



ในระบบพิกัดแบบคาทีเซียน (cartesian coordinates system) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน x, y, และ z แทนด้วยสัญลักษณ์ **i, j, k** ตามลำดับ

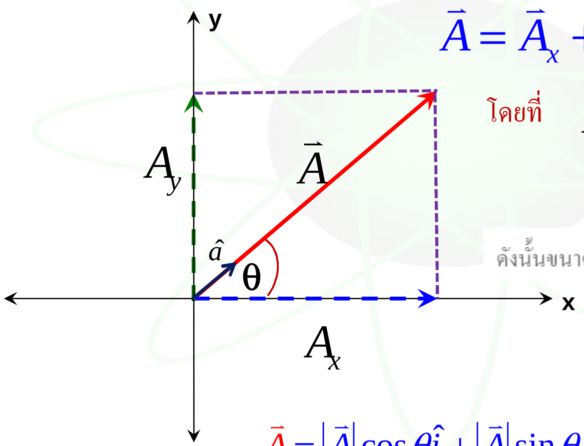


องค์ประกอบเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

การเขียนเวกเตอร์องค์ประกอบ

เวกเตอร์องค์ประกอบในแนวแกน x คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วย i

เวกเตอร์องค์ประกอบในแนวแกน y คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วย j



$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$

โดยที่ $\vec{A}_x = |A|\cos\theta$

$\vec{A}_y = |A|\sin\theta$

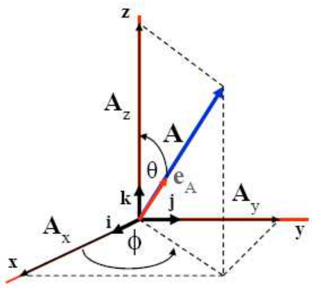
ดังนั้นขนาดของเวกเตอร์ A และ เวกเตอร์หน่วย

$$|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$\hat{a} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$$

$$\vec{A} = |\vec{A}|\cos\theta\hat{i} + |\vec{A}|\sin\theta\hat{j} = |\vec{A}|\left[\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}\right]$$

องค์ประกอบเวกเตอร์ใน 3 มิติ



$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

จากรูปจะเห็นว่า

$$A_x = A\sin\theta\cos\phi$$
$$A_y = A\sin\theta\sin\phi$$
$$A_z = A\cos\theta$$

ดังนั้นขนาดของเวกเตอร์ **A**

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

และมีเวกเตอร์หน่วย $\mathbf{e}_A$

$$\mathrm{e}_A = \sin\theta\cos\phi\ \mathrm{i} + \sin\theta\sin\phi\ \mathrm{j} + \cos\theta\ \mathrm{k}$$

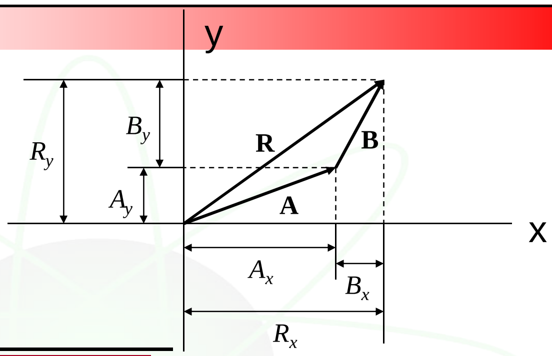
การบวกเวกเตอร์

กำหนดให้

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$

และ

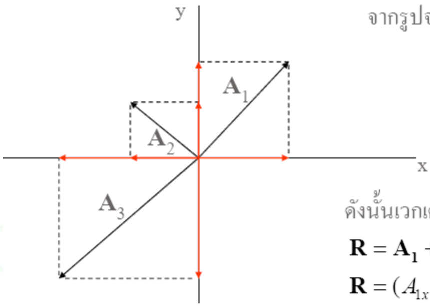
$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$$



$$\begin{aligned}\vec{R} &= \vec{A} + \vec{B} \\ &= (A_x\hat{i} + A_y\hat{j}) + (B_x\hat{i} + B_y\hat{j}) \\ &= (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} \\ &= R_x\hat{i} + R_y\hat{j}\end{aligned}$$

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x}$$

การรวมเวกเตอร์ด้วยวิธีแยกองค์ประกอบ

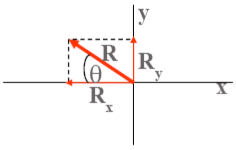


จากรูปจะเห็นว่า

$$\mathbf{A}_1 = A_{1x}\,\mathbf{i} + A_{1y}\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{A}_2 = -A_{2x}\,\mathbf{i} + A_{2y}\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{A}_3 = -A_{3x}\,\mathbf{i} - A_{3y}\,\mathbf{j}$$

ดังนั้นเวกเตอร์ลัพธ์ของสามเวกเตอร์คือ

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3$$
$$\mathbf{R} = (A_{1x} - A_{2x} - A_{3x})\mathbf{i} + (A_{1y} + A_{2y} - A_{3y})\mathbf{j}$$
$$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j}$$



ขนาดและทิศทางของ **R** คือ

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right)$$

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $\mathbf{A}_1 = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$ จงหา **(1)** $\mathbf{R} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$

$\mathbf{A}_2 = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ (2) $\mathbf{R} = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2$

<u>วิธีทำ</u>

(1)

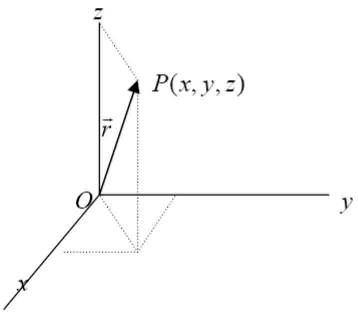
$$\mathbf{R} = (3+1)\mathbf{i} + (5-4)\mathbf{j} + (-1+3)\mathbf{k}$$
$$\mathbf{R} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$
$$R = \sqrt{4^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{21}$$

(2)

$$\mathbf{R} = (3-1)\mathbf{i} + (5-(-4))\mathbf{j} + (-1-3)\mathbf{k}$$
$$\mathbf{R} = 2\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$
$$R = \sqrt{2^2 + 9^2 + (-4)^2} = \sqrt{101}$$

เวกเตอร์บอกตำแหน่ง

คือ การบอกตำแหน่งของจุดหนึ่ง เทียบกับอีกจุดหนึ่ง ซึ่งโดยปกติมักจะเทียบกับจุดกำเนิด



$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\left|\overrightarrow{OP}\right| = \left|\vec{r}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

จงหาเวกเตอร์ตำแหน่งของจุด P(2,3,4)

$$\overrightarrow{OP} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$$

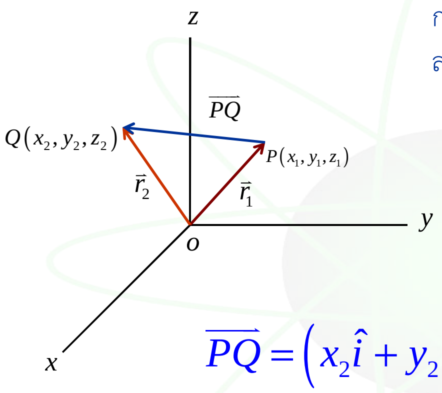
$$\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$$ ขนาด

จงหาเวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด Q(1,-1,2)

$$\overrightarrow{OQ} = 1\hat{i} - 1\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\left|\overrightarrow{OQ}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$ ขนาด

การบอกตำแหน่ง อาจบอกเทียบกับจุดอื่นๆ ที่ไม่ใช่จุดกำเนิดก็ได้



การบอกตำแหน่งของจุด Q เทียบกับจุด P

ลากจากจุด P ไปยังจุด Q

$\overrightarrow{PQ}$ หาได้จาก

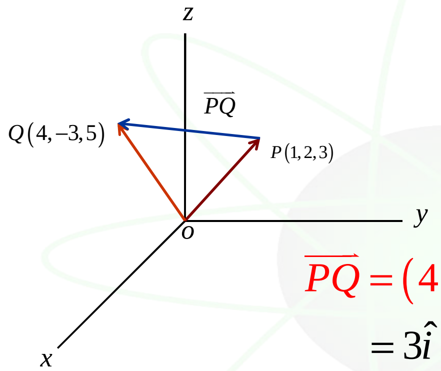
$$\vec{r}_1 + \overrightarrow{PQ} = \vec{r}_2$$

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\overrightarrow{PQ} = \left(x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}\right) - \left(x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}\right)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

ตัวอย่าง จงหาขนาดและทิศทางของ $\overrightarrow{PQ}$



$$\vec{r}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{r}_2 = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\overrightarrow{PQ} = (4-1)\hat{i} + (-3-2)\hat{j} + (5-3)\hat{k}$$

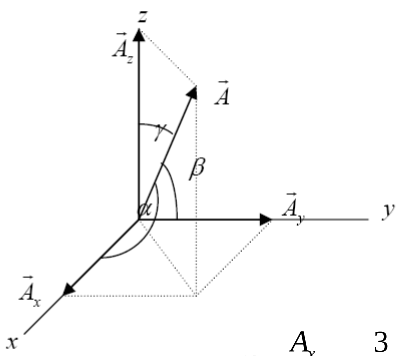
$$= 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 2^2}$$

$$= \sqrt{38}$$

$$= 6.16$$

ทิศทางของ $\overrightarrow{PQ}$



$$A_x = \left|\vec{A}\right| \cos\alpha$$

$$A_y = \left|\vec{A}\right| \cos\beta$$

$$A_z = \left|\vec{A}\right| \cos\gamma$$

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{\left|\vec{A}\right|} = \frac{3}{6.16} = 0.49 \;\; ; \quad \alpha = \cos^{-1}(0.49) = 60.66^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{A_x}{\left|\vec{A}\right|} = \frac{-5}{6.16} = -0.81 \; ; \quad \beta = \cos^{-1}(-0.81) = 144.09^\circ$$

$$\cos\gamma = \frac{A_x}{\left|\vec{A}\right|} = \frac{2}{6.16} = 0.32 \;\; ; \quad \gamma = \cos^{-1}(0.32) = 71.34^\circ$$

การคูณเวกเตอร์

- คูณเวกเตอร์ด้วยปริมาณ สเกลาร์
- คูณเวกเตอร์ด้วยเวกเตอร์ ผลที่ได้เป็น สเกลาร์ (dot product)
- คูณเวกเตอร์ด้วยเวกเตอร์ ผลที่ได้เป็นเวกเตอร์ (cross product)

คูณเวกเตอร์ด้วยปริมาณ สเกลาร์

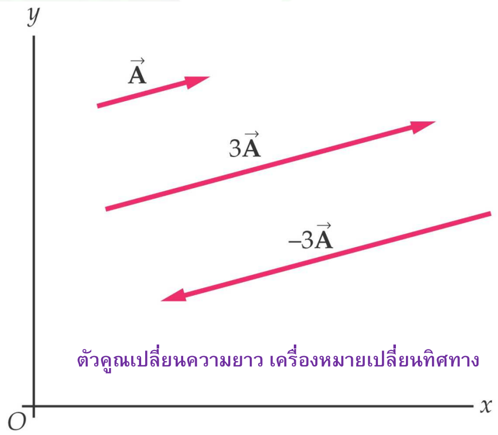
ให้ a และ b เป็น สเกลาร์

$$a\vec{A} = \vec{A}a$$

$$a(b\vec{A}) = (ab)\vec{A}$$

$$(a+b)\vec{A} = a\vec{A} + b\vec{A}$$

$$a(\vec{A}+\vec{B}) = a\vec{A} + a\vec{B}$$

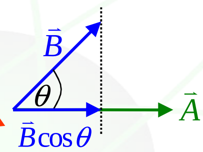


ตัวคูณเปลี่ยนความยาว เครื่องหมายเปลี่ยนทิศทาง

คูณเวกเตอร์ด้วยเวกเตอร์ ผลที่ได้เป็น สเกลาร์ (dot product)

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = \vec{A}\vec{B}\cos\theta = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{A}\boxed{\vec{B}\cos\theta}$$



โดยที่

$$0 \le \theta \le 180^\circ$$

เป็นผลคูณของส่วนประกอบในแนวที่ขนานกันนั่นเอง

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \qquad \vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\bullet\vec{B} &= (A_x\hat{i}.B_x\hat{i} + \overset{0}{A_x\hat{i}.B_y\hat{j}} + \overset{0}{A_x\hat{i}.B_z\hat{k}}) \\ &\quad + (\overset{0}{A_y\hat{j}.B_x\hat{i}} + A_y\hat{j}.B_y\hat{j} + \overset{0}{A_y\hat{j}.B_z\hat{k}}) \\ &\quad + (\overset{0}{A_z\hat{k}.B_x\hat{i}} + \overset{0}{A_z\hat{k}.B_y\hat{j}} + A_z\hat{k}.B_z\hat{k}) \\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z\end{aligned}$$

จากนิยามของการคูณแบบสเกลาร์ $\mathbf{A.B} = AB\cos\theta$

เนื่องจากเวกเตอร์หนึ่งหน่วย **i**, **j** และ **k** ทำมุมตั้งฉากกันคือ $\theta = 90°$

ดังนั้น $\mathbf{i.j} = ij\cos 90 = 0$, $\mathbf{j.k} = jk\cos 90 = 0$, $\mathbf{k.i} = ki\cos 90 = 0$

ส่วน $\mathbf{i.i} = \mathbf{j.j} = \mathbf{k.k} = 1$ เนื่องจากเวกเตอร์มีทิศเดียวกัน

$$\begin{aligned}\hat{i}.\hat{i} &= \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1 \\ \hat{i}.\hat{j} &= \hat{j}.\hat{i} = 0 \\ \hat{i}.\hat{k} &= \hat{k}.\hat{i} = 0 \\ \hat{j}.\hat{k} &= \hat{k}.\hat{j} = 0\end{aligned}$$

สมบัติการคูณแบบสเกลาร์

(1) $\mathbf{A.B} = \mathbf{B.A}$

(2) $\mathbf{A.(B+C)} = \mathbf{A.B} + \mathbf{A.C}$

(3) $m(\mathbf{A.B}) = (m\mathbf{A}).\mathbf{B} = \mathbf{A}.(m\mathbf{B}) = (\mathbf{A.B})m$

(4) $\mathbf{i.i} = \mathbf{j.j} = \mathbf{k.k} = 1$

$\mathbf{i.j} = \mathbf{j.k} = \mathbf{k.i} = 0$

(5) $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$

$\mathbf{A.B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

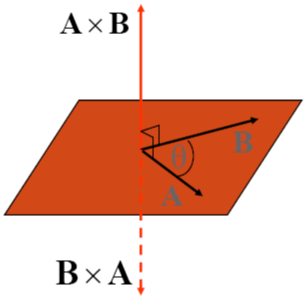
$\mathbf{A.A} = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$

$\mathbf{B.B} = B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$

(6) $\mathbf{A.B} = 0$ if $\mathbf{A} \neq 0, \mathbf{B} \neq 0$ then $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$

คูณเวกเตอร์ด้วยเวกเตอร์ ผลที่ได้เป็น เวกเตอร์ (cross product)

ผลคูณแบบเวกเตอร์



$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ อ่านว่า "**A** cross **B**"

โดยมีขนาดเป็น

$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = AB\sin\theta$

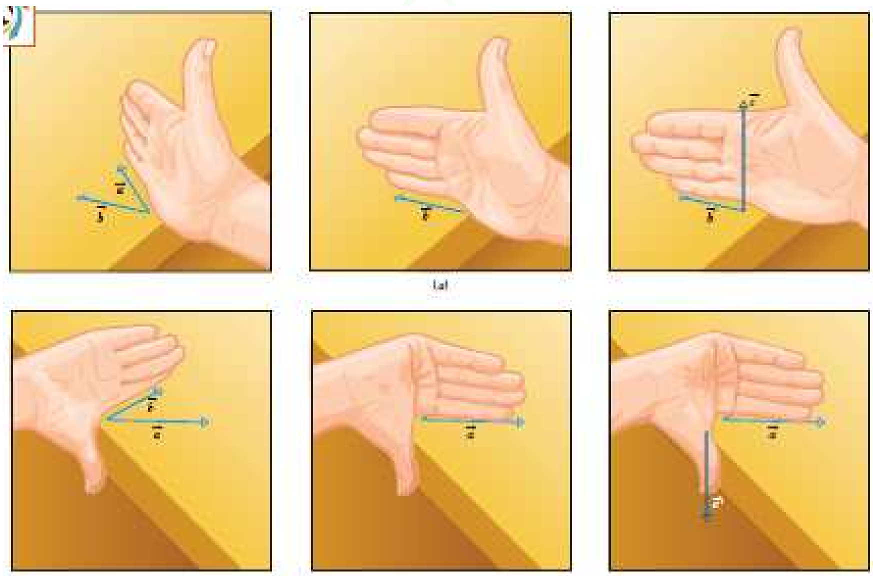
จากรูปแสดงให้เห็นว่า

$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$

ถ้า $\theta = 0^\circ$ **และ** 180° **จะทำให้ผลการครอสมีค่าเท่ากับศูนย์**

$|\vec{A}\times\vec{B}|$ เป็นพื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านเป็น $|\vec{A}|$ และ $|\vec{B}|$

ทิศทางของ $|\vec{A}\times\vec{B}|$ หาได้จากการใช้มือขวา กวาดจาก $\vec{A}$ ไป $\vec{B}$



vector Product / Cross Product

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \qquad \vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

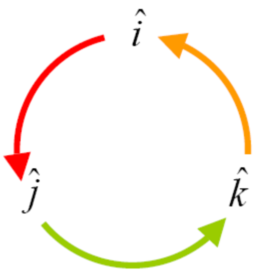
$$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$$

$$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k} \qquad \hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k}$$

$$\hat{j}\times\hat{k} = \hat{i} \qquad \hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j}$$

$$\hat{k}\times\hat{i} = \hat{j} \qquad \hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \left|\begin{array}{ccc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{array}\right| \begin{array}{cc} \hat{i} & \hat{j} \\ A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{array}$$



$$\boxed{\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} &= (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} \\ &+ (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j} \\ &+ (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}\end{aligned}}$$

คุณสมบัติของ cross product

(1) $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$

(2) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\mathbf{C}$

(3) $m(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (m\mathbf{A})\times\mathbf{B} = \mathbf{A}\times(m\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})m$

(4) $\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0$

$\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}$

$\mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}$

$\mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$

(5) $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$

$\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

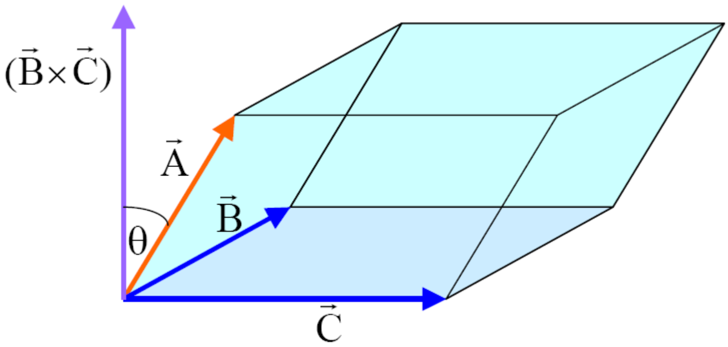
$$= (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\mathbf{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{k}$$

ผลคูณเชิงสเกลาร์สามชั้น

ผลคูณเชิงสเกลาร์สามชั้น (scalar triple product) คือ ผลคูณของเวกเตอร์สามเวกเตอร์ ซึ่งอยู่ในรูป $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})$ ให้ค่าผลคูณเป็นสเกลาร์

ขนาดของ $\vec{B}\times\vec{C}$ คือ พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\vec{B}$ และ $\vec{C}$ เป็นด้านประกอบ

ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{A}$ กับ $\vec{B}\times\vec{C}$ จะได้ $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cos\theta)\left|\vec{B}\times\vec{C}\right|$



จะได้ปริมาตรรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนานที่มีด้านประกอบ คือ $\vec{A}$, $\vec{B}$ และ $\vec{C}$

ผลคูณเชิงสเกลาร์สามชั้น

ผลคูณเชิงสเกลาร์สามชั้น มีคุณสมบัติ ดังนี้

1. $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}.(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B})$

2. เมื่อเขียนส่วนประกอบพิกัดฉากของเวกเตอร์เป็น

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$
$$\vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k}$$

จะได้

$$\vec{A}(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์สามชั้น

$$\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C} = \vec{B}(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$$

ตัวอย่าง

ถ้าเวกเตอร์ $\vec{r} = 2\hat{i} + 1\hat{j} + 2\hat{k}$ m และ $\vec{F} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ N

จงหาทอร์กของแรง $\vec{F}$ นี้ ถ้าทอร์ก $\vec{\Gamma} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$\vec{\Gamma} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= \left(2\hat{i} + 1\hat{j} + 2\hat{k}\right) \times \left(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}\right) \ mN$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \ mN$$

$$= (1)(1)\hat{i} + (2)(2)\hat{j} + (2)(3)\hat{k} - (2)(3)\hat{i} - (1)(2)\hat{j} - (1)(2)\hat{k} \quad mN$$

$$= (1-6)\hat{i} + (4-2)\hat{j} + (6-2)\hat{k} \quad \mathrm{mN}$$

$$= -5\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k} \ \ \mathrm{mN}$$

แคลคูลัสเวกเตอร์

การหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์

$\vec{r}$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร t หรือเขียนได้ในรูป $\vec{r}(t)$

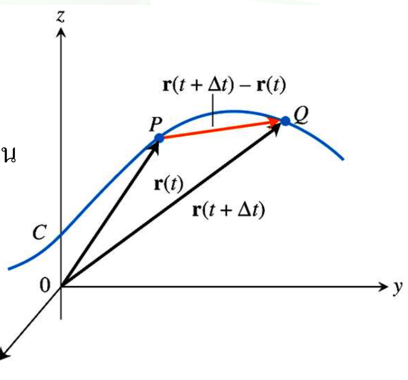
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

เขียนในรูปองค์ประกอบพิกัดฉาก จะได้

$$\vec{r}(t) = r_x(t)\hat{i} + r_y(t)\hat{j} + r_z(t)\hat{k}$$

เมื่อ t เปลี่ยนแปลง เขียนอนุพันธ์ของ $r(t)$ ได้เป็น

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr_x}{dt}\hat{i} + \frac{dr_y}{dt}\hat{j} + \frac{dr_z}{dt}\hat{k}$$



อนุพันธ์ของเวกเตอร์ในรูปผลบวกและผลคูณ

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=\frac{d\vec{A}}{dt}+\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)=\frac{d\vec{A}}{dt}.\vec{B}+\vec{A}.\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(a\vec{A}\right)=a\frac{d\vec{A}}{dt}+\frac{da}{dt}\vec{A}$$

เมื่อ a เป็นสเกลาร์ฟังก์ชันที่แปรตาม t

กรณีที่เวกเตอร์เป็นฟังก์ชันของตัวแปรหลายตัว

$$\vec{A}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A(x+\Delta x,y,z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{A(x,y+\Delta y,z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{A(x,y,z+\Delta z)}{\Delta z}$$

การหาอินทิกรัลของเวกเตอร์

$$\int S(t)dt=\int S_x(t)dt\hat{i}+\int S_y(t)dt\hat{j}+\int S_z(t)dt\hat{k}$$

ตัวดำเนินการเดล (del operater)

สัญลักษณ์ของตัวดำเนินการเดล คือ “ ∇ ”

ในระบบพิกัดฉาก ตัวดำเนินการเดล มีรูปแบบดังนี้

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

เมื่อใช้ตัวดำเนินการต่อฟังก์ชันสเกลาร์ $f(x,y,z)$ ที่ขึ้นกับตำแหน่ง จะได้ค่า เกรเดียนต์ (gradient) ของฟังก์ชัน $f(x,y,z)$ เขียนเป็น $gradf(x,y,z)$ หรือเขียนในรูปตัวดำเนินการเดลเป็น $\vec{\nabla} f(x,y,z)$ คือ ปริมาณเวกเตอร์

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

ตัวดำเนินการเดล (del operater)

เมื่อใช้ตัวดำเนินการต่อฟังก์ชันแวกเตอร์ $V(x,y,z)$ ที่ขึ้นกับตำแหน่ง โดยดำเนินการแบบ ดอต จะได้ค่า ไดเวอร์เจนซ์ (divergence) ของฟังก์ชัน $V(x,y,z)$ เขียนเป็น $divV(x,y,z)$ หรือเขียนในรูปตัวดำเนินการเดลเป็น $\vec{\nabla}.V(x,y,z)$ มีค่าเป็นสเกลาร์

$$\vec{\nabla}.V(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).\left(V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}\right)$$

$$\vec{\nabla}.V(x,y,z) = \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right)$$

$$\vec{\nabla}.V \neq V.\vec{\nabla} \quad \Longrightarrow \quad V.\vec{\nabla} = V_x\frac{\partial}{\partial x} + V_y\frac{\partial}{\partial y} + V_z\frac{\partial}{\partial z}$$

ตัวดำเนินการเดล (del operater)

เมื่อใช้ตัวดำเนินการต่อฟังก์ชันแวกเตอร์ $V(x,y,z)$ ที่ขึ้นกับตำแหน่ง โดยดำเนินการแบบ ครอส จะได้ค่า เคิร์ล (curl) ของฟังก์ชัน $V(x,y,z)$ เขียนเป็น $curlV(x,y,z)$ หรือเขียนในรูปตัวดำเนินการเดลเป็น $\vec{\nabla}\times V(x,y,z)$ มีค่าเวกเตอร์

$$\vec{\nabla}\times V(x,y,z)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\times\left(V_x\hat{i}+V_y\hat{j}+V_z\hat{k}\right)$$

$$\vec{\nabla}\times V(x,y,z)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

ตัวดำเนินการเดล (del operater)

ผลคูณสเกลาร์ของ $\vec{\nabla}$ คือ $\vec{\nabla}.\vec{\nabla}$ จะได้ $\vec{\nabla}^2$ เป็นตัวดำเนินการ เรียกว่า ตัวดำเนินการของลาปลาซ หรือ ตัวดำเนินการลาปลาเซียน (Laplacian operator) อยู่ในรูป

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}=\vec{\nabla}^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

เมื่อนำ $\vec{\nabla}^2$ ไปดำเนินการกับฟังก์ชันที่เป็นสเกลาร์ จะได้ผลเป็นสเกลาร์ เช่น

$$\vec{\nabla}^2 f(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

เมื่อนำ $\vec{\nabla}^2$ ไปดำเนินการกับฟังก์ชันที่เป็นเวกเตอร์ จะได้ผลเป็นเวกเตอร์ เช่น

$$\vec{\nabla}^2 V(x,y,z)=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$