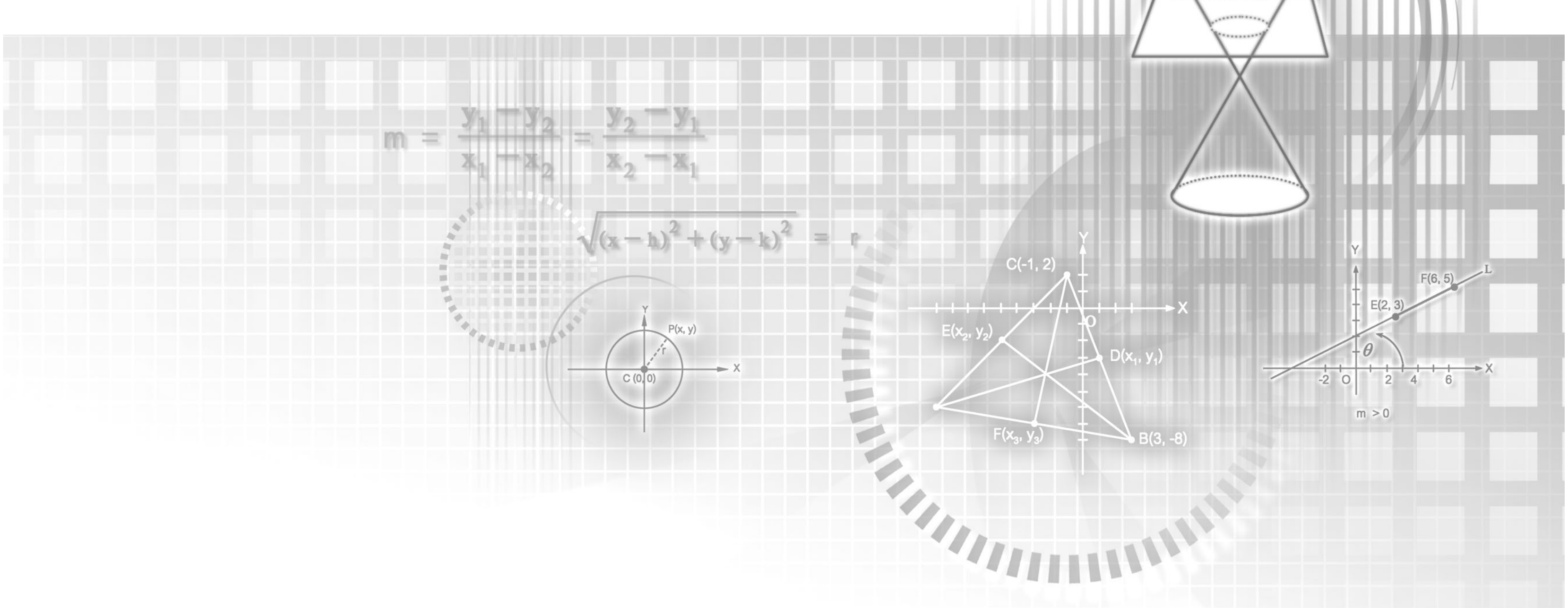
หลักสูตรลดระยะเวลาเรียน
สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ด้านคณิตศาสตร์
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

แผนการจัดการเรียนรู้
เรขาคณิตวิเคราะห์



โครงการความร่วมมือระหว่างสำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาและมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
ในการขยายเครือข่ายการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้

371.95　　สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา
ส 691 ผ　　　แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ หลักสูตรลดระยะเวลาเรียน
สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
กรุงเทพฯ : 2551
151 หน้า
ISBN 978-974-559-198-1
1. การศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ - หลักสูตร
2. การศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ-คณิตศาสตร์ 3. ชื่อเรื่อง

แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ หลักสูตรลดระยะเวลาเรียนสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

สิ่งพิมพ์ สกศ.　อันดับที่ 30 / 2551
พิมพ์ครั้งที่ 1　กุมภาพันธ์ 2551
จำนวน　1,000 เล่ม
จัดพิมพ์เผยแพร่　สำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้
สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา
99/20 ถนนสุโขทัย เขตดุสิต กรุงเทพฯ 10300
โทรศัพท์ 0-2668-7974 หรือ 0-2668-7123 ต่อ 2530
โทรสาร 0-2243-1129, 0-2668-7329
Web site: http:// www.onec.go.th และ http:// www.thaigifted.org
ผู้พิมพ์　บริษัท ออฟเซ็ท จำกัด
580 หมู่ 8 ซ.รามอินทรา 34 แยก 1
ถ.รามอินทรา แขวงท่าแร้ง เขตบางเขน กรุงเทพฯ 10230
โทรศัพท์ 0-2943-8373-4 โทรสาร 0-2510-7753

คำนำ

ตามที่พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ.2542 และแก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ.2545 มาตรา 10 วรรคสี่ กำหนดให้การจัดการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องจัดด้วยรูปแบบที่เหมาะสม โดยคำนึงถึงความสามารถของบุคคลนั้น และในมาตรา 28 ยังได้กำหนดให้หลักสูตรการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามาถพิเศษต้องมีลักษณะหลากหลาย ทั้งนี้ ให้จัดตามความเหมาะสมของแต่ละระดับ โดยมุ่งพัฒนาคุณภาพชีวิตของบุคคลให้เหมาะสมแก่วัยและศักยภาพ

สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา โดยความร่วมมือของมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่ ได้ดำเนินการวิจัยนำร่องขยายเครือข่ายการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้ ปีการศึกษา 2547) ซึ่งมีกระบวนการหนึ่งที่สำคัญคือ การจัดทำหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน (Acceleration Program) เป็นการจัดหลักสูตรสำหรับผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ โดยปรับหลักสูตรปกติให้กระชับ ใช้เวลาเรียนให้สั้นลงเหมาะสมกับศักยภาพของผู้เรียน และนำเวลาที่เหลือมาเพิ่มพูนประสบการณ์ในระดับที่กว้าง ยากและลึกซึ้งกว่าหลักสูตรปกติ ทั้งนี้จะเป็นการช่วยไม่ให้ผู้เรียนเกิดความเบื่อหน่ายการเรียนในวิชาปกติที่เขาสามารถเรียนรู้ได้เร็วกว่าเพื่อน รวมทั้งเป็นการป้องกันไม่ให้เกิดความถดถอยทางศักยภาพหรือทำลายศักยภาพของตัวเอง สำหรับการวัดและประเมินผลในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน โรงเรียนควรใช้มาตรฐานเดียวกันเหมือนเด็กกลุ่มปกติ

เอกสารเล่มนี้เป็น **แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียนสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย** ซึ่งเป็นหนึ่งในสิบแปดเล่มที่ได้จากการวิจัยนำร่องฯ ดังกล่าวข้างต้น โดยกำหนดให้มีการเรียนการสอนเพียง 5 ภาคเรียนจากปกติใช้เวลาทั้งหมด 6 ภาคเรียน ซึ่งเนื้อหาที่ปรากฏอยู่ในเอกสารเล่มนี้เป็นเพียงตัวอย่างเพื่อเป็นแนวทางให้ครูผู้สอนสามารถนำไปใช้สำหรับการเรียนการสอน ทั้งนี้ ครูผู้สอนสามารถนำไปประยุกต์ใช้ ปรับเปลี่ยน ขยายเนื้อหาหรือเลือกเนื้อหาอื่นๆ ที่น่าสนใจ หรือเหมาะสมกับสภาพการณ์ของครูและนักเรียนในแต่ละโรงเรียนได้

ในโอกาสนี้ สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาขอขอบคุณรองศาสตราจารย์อาริสา รัตนเพ็ชร์ และคณะจากภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ผู้บริหารโรงเรียน คณะครู-อาจารย์และนักเรียนที่อยู่ในโครงการฯ ตลอดจนคณะครูคณิตศาสตร์โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพฯ ที่เห็นคุณค่าของเอกสารนี้ จึงให้ความอนุเคราะห์ตรวจสอบความถูกต้องจนเสร็จสมบูรณ์ สำนักงานฯ หวังเป็นอย่างยิ่งว่าองค์ความรู้ที่ได้จากการวิจัยครั้งนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ของประเทศไทยต่อไป

(นายอำรุง จันทวานิช)
เลขาธิการสภาการศึกษา

คำชี้แจง

ตามที่พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 และที่แก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ.2545 ในมาตรา 10 (วรรค 4) ได้กำหนดให้การจัดการศึกษาสำหรับบุคคลที่มีความสามารถพิเศษ ต้องจัดด้วยรูปแบบที่เหมาะสม โดยคำนึงถึงความสามารถของบุคคลนั้น และมาตรา 28 ระบุว่า หลักสูตรการศึกษาระดับต่างๆ รวมทั้งหลักสูตรการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องมีลักษณะหลากหลาย ทั้งนี้ให้จัดตามความเหมาะของแต่ละระดับ โดยมุ่งพัฒนาคุณภาพชีวิตของบุคคลให้เหมาะสมกับวัยและศักยภาพ นั้น

สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา จึงได้จัดทำโครงการวิจัยนำร่องและพัฒนาเด็กและเยาวชนที่มีความสามารถพิเศษมาตั้งแต่ปี 2543 เพื่อค้นหารูปแบบและพัฒนาหลักสูตรการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษในสาขาวิชาต่างๆ ทั้งระดับประถมและมัธยมศึกษา ในลักษณะเรียนร่วมในโรงเรียนทั่วไป หรือที่เรียกว่า school in school program โดยในปีการศึกษา 2547 ได้ขยายโรงเรียนเครือข่ายสู่ภูมิภาคในภาคเหนือและภาคใต้ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งกระบวนการจัดการศึกษานี้เน้นการจัด Gifted Education ขั้นตอนเริ่มตั้งแต่การเสาะหาและคัดเลือก มีการพัฒนาหลักสูตรที่ใช้วิธีการลดระยะเวลาเรียน (Acceleration Program) เป็นการย่นระยะเวลาเรียนให้น้อยลง แต่ยังคงเนื้อหาเท่าเดิมครบถ้วนตามหลักสูตรแกนที่กระทรวงศึกษาธิการกำหนด และจัดทำหลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์ (Enrichment Program) เพิ่มเติมให้กับเด็กกลุ่มนี้ เป็นการขยายกิจกรรมในหลักสูตรให้กว้างและลึกซึ้งกว่าที่มีในหลักสูตรปกติ เพื่อช่วยกระตุ้นความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ทักษะในการคิด วิเคราะห์ การแก้ปัญหา การใช้สติปัญญาในการให้เหตุผล ฯลฯ เมื่อผู้เรียนสามารถจบหลักสูตรในแต่ละช่วงชั้นก่อนกำหนด (เช่น ด้านภาษาใช้เวลา 3 ภาคเรียน จาก 6 ภาคเรียน หรือด้านคณิตศาสตร์ ใช้เวลา 5 ภาคเรียน จาก 6 ภาคเรียน เป็นต้น) เวลาที่เหลือโรงเรียนหรือครูผู้สอนก็สามารถจัดหลักสูตรขยายประสบการณ์ (Extension Program) หรือให้นักเรียนที่มีประสบการณ์ทำงานร่วมกับผู้เชี่ยวชาญ (mentor) ซึ่งเป็นวิธีการจัดโปรแกรมการศึกษานอกหลักสูตร ที่สามารถตอบสนองความสนใจและความสามารถเป็นรายบุคคล เช่น การจัด AP Program (Advanced Placement Program) หรือโครงการเรียนล่วงหน้า ที่เป็นการนำเอาเนื้อหาในหลักสูตรระดับอุดมศึกษามาเรียนในขณะที่ยังเรียนอยู่ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และสามารถเก็บหน่วยกิตไว้ได้ เป็นต้น นอกจากนี้ ยังต้องปรับวิธีการวัดและประเมินผลตามสภาพจริง มีการจัดสภาพแวดล้อมที่เหมาะสม และมีการบริหารจัดการที่เอื้อต่อการจัดการศึกษาให้กับเด็กกลุ่มนี้ด้วย

แผนการจัดการเรียนรู้เล่มนี้ เป็นหนึ่งใน 18 เล่ม ที่ใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน(Acceleration Program) โดยกำหนดให้มีการเรียนการสอนเพียง 5 ภาคเรียน (ปกติใช้เวลาทั้งหมด 6 ภาคเรียน) ของโรงเรียนที่เข้าร่วมโครงการฯ เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้ โดยแต่ละโรงเรียนจะใช้แผนการจัดการเรียนรู้ร่วมกัน แต่อาจจะมีลำดับในการสอนแตกต่างกัน ขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของแต่ละโรงเรียน (ดูรายละเอียดแผนการจัดการเรียนรู้ของแต่ละหน่วยการเรียนในตารางหน้าถัดไป) สำหรับการวัดและประเมินผลตามหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน เป็นการวัดความรู้ความเข้าใจของผู้เรียน โดยใช้ข้อสอบ Pre-test และ Post-test ที่ออกโดยคณะวิจัย และอาจารย์รับผิดชอบโครงการจากแต่ละโรงเรียน

ตารางแผนการจัดการเรียนรู้ของหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน
ด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

<table>
<tr><th colspan="2">ระดับ</th><th>เนื้อหา</th><th>จำนวน
คาบ</th><th>โรงเรียนที่รับผิดชอบ
เขียนแผนการจัดการเรียนรู้</th></tr>
<tr><td rowspan="2">มัธยมศึกษาปีที่ 4</td><td>ภาคเรียนที่ 1</td><td>1. เซต
2. การให้เหตุผล
3. ตรรกศาสตร์
4. จำนวนจริงและทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น</td><td>10
6
24
38</td><td>โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย จ.สตูล
โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย</td></tr>
<tr><td>ภาคเรียนที่ 2</td><td>5. เรขาคณิตวิเคราะห์
6. ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
7. ตรีโกณมิติ
8. กำหนดการเชิงเส้น</td><td>38
30
48
6</td><td>โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
โรงเรียนบูรณะรำลึก และมหาวชิราวุธ
โรงเรียนมหาวชิราวุธ</td></tr>
<tr><td colspan="3">รวม</td><td>200</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">มัธยมศึกษาปีที่ 5</td><td>ภาคเรียนที่ 1</td><td>9. ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและลอการิทึม
10. เมทริกซ์และดีเทอร์มินันท์
11. เวกเตอร์ 2 และ 3 มิติ
12. จำนวนเชิงซ้อนและสมการพหุนาม</td><td>27
20
36
24</td><td>โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
โรงเรียนสุราษฎร์ธานี
โรงเรียนพุนพิทยาคม
โรงเรียนมหาวชิราวุธ</td></tr>
<tr><td>ภาคเรียนที่ 2</td><td>13. ทฤษฎีกราฟ
14. ลำดับและอนุกรม
15. ลิมิตของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน และการอินติเกรด</td><td>15
38
40</td><td>โรงเรียนบูรณะรำลึก
โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย จ.สตูล</td></tr>
<tr><td colspan="3">รวม</td><td>200</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">มัธยมศึกษาปีที่ 6
ภาคเรียนที่ 1</td><td>16. การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่
17. ความน่าจะเป็น
18. สถิติและความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูล
▪ การนำเสนอข้อมูลและค่ากลาง (12 คาบ)
▪ การกระจายของข้อมูล (25 คาบ)
▪ ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน (13 คาบ)</td><td>30
20
50</td><td>โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย

โรงเรียนบูรณะรำลึก
โรงเรียนสุราษฎร์ธานี
โรงเรียนพุนพินพิทยาคม</td></tr>
<tr><td colspan="3">รวม</td><td>100</td><td></td></tr>
</table>

สารบัญ

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

เรื่อง **เรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. หาระยะระหว่างจุดสองจุดได้
2. นำความรู้เรื่องการหาระยะระหว่างจุดสองจุดไปใช้แก้โจทย์ปัญหาได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. เขียนจุดลงบนระนาบแกนมุมฉากได้
2. บอกสูตรการหาระยะระหว่างจุดสองจุดกรณีต่างๆ ได้
3. หาระยะระหว่างจุดสองจุดได้

2. แนวความคิดหลัก(สาระสำคัญ)

การหาระยะระหว่างจุดสองจุดใดๆ ในระนาบ

3. เนื้อหาสาระ

เส้นตรงขนานกับแกน X กำหนดจุด $P(x_1, y_1)$ และ จุด $Q(x_2, y_1)$ (สมาชิกตัวหลังมีค่าเท่ากัน)

จะได้ $PQ = |x_1 - x_2|$

เส้นตรงขนานกับแกน Y กำหนดจุด $P(x_1, y_1)$ และ จุด $Q(x_1, y_2)$ (สมาชิกตัวหน้ามีค่าเท่ากัน)

จะได้ $PQ = |y_1 - y_2|$

เส้นตรงไม่ขนานกับแกน X และไม่ขนานกับแกน Y กำหนดจุด $P(x_1, y_1)$ และ จุด $Q(x_2, y_2)$

จะได้ $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ให้นักเรียนทบทวนความรู้เกี่ยวกับระบบพิกัดฉากและการลงจุด
2. แบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มๆ ละ 4 - 5 คน แล้วให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้เรื่องการหาระยะระหว่าง จุดสองจุด แล้วสรุปสูตรการหาระยะระหว่างจุดสองจุดกรณีต่างๆ
3. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้ที่ 1.1 เกี่ยวกับการหาระยะระหว่างจุดสองจุดกรณีต่างๆ
4. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้ เกี่ยวกับการนำความรู้เรื่องการหาระยะระหว่างจุดสองไปใช้แก้โจทย์ปัญหา
5. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 1.1

5. แหล่งการการเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 1.1
2. ใบงานที่ 1.1
3. หนังสือ
4. แผ่นใส

6. กระบวนการวัดผลประเมินผล

สิ่งที่วัดผล	วิธีวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
1. ด้านความรู้	1. ตรวจใบงาน 2. ทดสอบ	1. ใบงานที่ 1.1 2. แบบทดสอบ	1. ทำถูกอย่างน้อย 95 % 2. ทำถูกอย่างน้อย 95 %
2. ด้านทักษะ	สังเกตจากการบอกหรือการสรุป	แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 90 %
3. ด้านคุณลักษณะ	สังเกต	แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 90 %

7. บันทึกหลังสอน

………...
………...
………...
………...
………...

8. กิจกรรมเสนอแนะ

………...
………...
………...
………...
………...

ใบความรู้ที่ 1.1 (ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์)

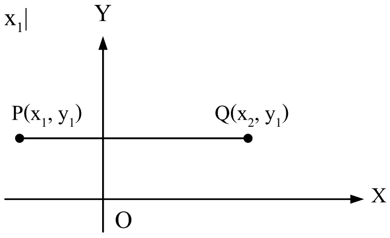
ระยะระหว่างจุดสองจุด

ถ้า P และ Q เป็นจุด 2 จุดใดๆ ระยะห่างระหว่างจุด P และ Q เขียนแทนด้วย |PQ|

แต่นิยมใช้ PQ ระยะระหว่างจุด P และ Q

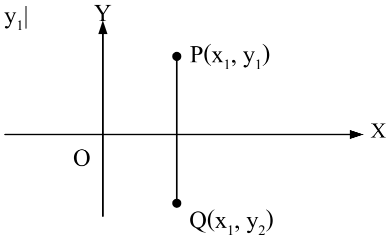
1. เส้นตรงขนานกับแกน X กำหนดจุด $P(x_1, y_1)$ และ จุด $Q(x_2, y_1)$ (สมาชิกตัวหลังมีค่าเท่ากัน)

จะได้ $PQ = |x_1 - x_2|$ หรือ $PQ = |x_2 - x_1|$

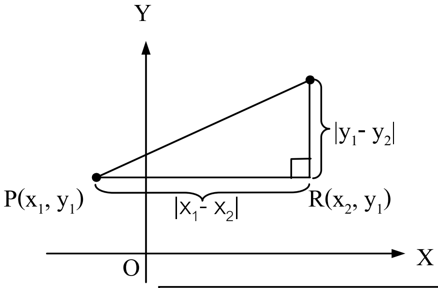


2. เส้นตรงขนานกับแกน Y กำหนดจุด $P(x_1, y_1)$ และ จุด $Q(x_1, y_2)$ (สมาชิกตัวหน้ามีค่าเท่ากัน)

จะได้ $PQ = |y_1 - y_2|$ หรือ $PQ = |y_2 - y_1|$



3. เส้นตรงไม่ขนานกับแกน X และไม่ขนานกับแกน Y กำหนดจุด $P(x_1, y_1)$ และ จุด $Q(x_2, y_2)$



จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก PQR โดยทฤษฎีบทปีทากอรัส

จะได้ $PQ^2 = |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2$

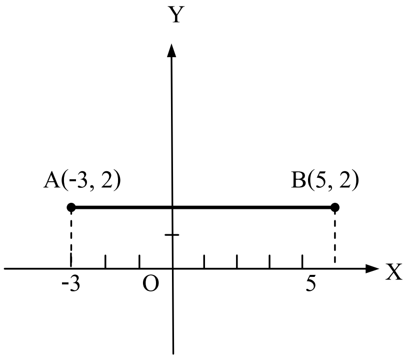
$$PQ = \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}$$

$$PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

> **ทฤษฎีบท** ถ้า $P(x_1, y_1)$ และ $Q(x_2, y_2)$ เป็นจุด 2 จุดบนระนาบ แล้ว
> ระยะห่างระหว่างจุด P และ Q คือ $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาระยะระหว่างจุด A(-3, 2) และ B(5, 2)

วิธีทำ เนื่องจากจุด A(-3, 2) และ B(5, 2) อยู่บนแนวเส้นตรงขนานกับแกน X ดังรูป



จะได้ $AB = |x_1 - x_2|$

$= |-3 - 5|$

$= 8$

หรือใช้สูตร $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

จะได้ $AB = \sqrt{(-3-5)^2 + (2-2)^2}$

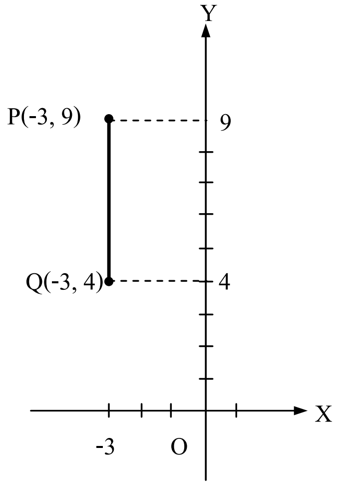
$= \sqrt{64}$

$= 8$

ดังนั้น ระยะระหว่างจุดจุด A(-3, 2) และ B(5, 2) เท่ากับ 8 หน่วย

ตัวอย่างที่ 2 จงหาระยะระหว่างจุด P(-3, 9) และ Q(-3, 4)

วิธีทำ เนื่องจากจุด P(-3, 9) และ Q(-3, 4) อยู่บนแนวเส้นตรงขนานกับแกน Y ดังรูป



จะได้ $PQ = |y_1 - y_2|$

$= |9 - 4|$

$= 5$

หรือใช้สูตร $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

จะได้ $Q = \sqrt{(-3+3)^2 + (9-4)^2}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$

ดังนั้น ระยะระหว่างจุด P(-3, 9) และ Q(-3, 4) เท่ากับ 5 หน่วย

ตัวอย่างที่ 3 จงหาระยะระหว่างจุด A(0, 0) และ B(-4, 2)

วิธีทำ จากสูตร $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

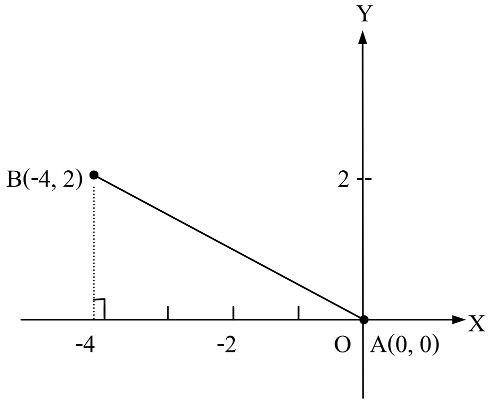
จะได้ $AB = \sqrt{(0+4)^2 + (0-2)^2}$

$= \sqrt{16+4}$

$= \sqrt{20}$

$= 2\sqrt{5}$

ดังนั้น ระยะระหว่างจุด A(0, 0) และ B(-4, 2) เท่ากับ $2\sqrt{5}$ หน่วย



ตัวอย่างที่ 4 จงหาระยะระหว่างจุด (-3, 6) และ (-9, -2)

วิธีทำ กำหนดให้ P(-3, 6) และ Q(-9, -2)

จะได้ $PQ = \sqrt{(-3+9)^2 + (6+2)^2}$

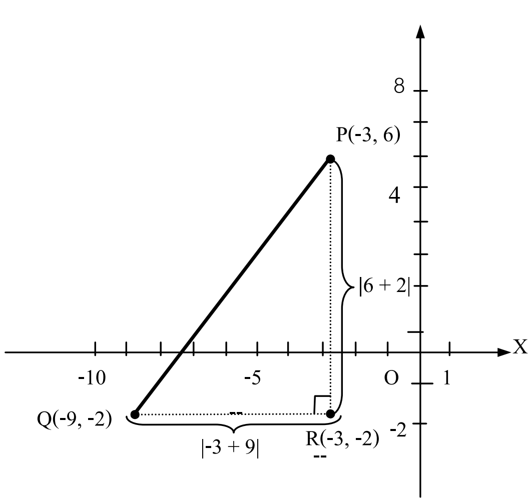
$= \sqrt{6^2 + 8^2}$

$= \sqrt{36 + 64}$

$= \sqrt{100}$

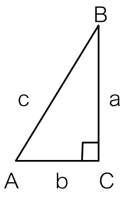
$= 10$

ดังนั้น ระยะระหว่างจุด (-3, 6) และ (-9, -2) เท่ากับ 10 หน่วย

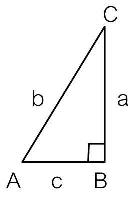


การแสดงว่าจุดสามจุดเป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่ โดยอาศัยทฤษฎีบทปีทากอรัส

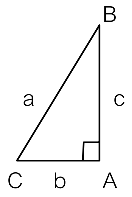
นั่นคือ กำหนด a, b และ c เป็นความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม ถ้า $a^2 + b^2 = c^2$ หรือ $a^2 + c^2 = b^2$ หรือ $b^2 + c^2 = a^2$ แล้ว สามเหลี่ยมนี้จะเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังรูป



$a^2 + b^2 = c^2$



$a^2 + c^2 = b^2$



$b^2 + c^2 = a^2$

ตัวอย่างที่ 5 จงแสดงว่าจุด (1, 1), (-1, -1) และ (-4, 2) เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

วิธีทำ กำหนดให้ A(1, 1), B(-1, -1) และ C(-4, 2)

จะได้ $AB = \sqrt{(1+1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

$BC = \sqrt{(-1+4)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$AC = \sqrt{(1+4)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$

ซึ่ง $AB^2 + BC^2 = (\sqrt{8})^2 + (\sqrt{18})^2 = 8 + 18 = 26$ และ $AC^2 = (\sqrt{26})^2 = 26$

นั่นคือ $AB^2 + BC^2 = AC^2$

แสดงว่า จุด (1, 1), (-1, -1) และ (-4, 2) เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

การพิจารณาว่าจุดทั้งสามที่กำหนดให้อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

นั่นคือ กำหนดให้ A, B และ C เป็นจุดในระนาบ ถ้า AB + BC = AC หรือ AB + AC = BC หรือ BC + AC = AB แสดงว่าจุดทั้งสามอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

ถ้าหาก AB + BC $\neq$ AC และ AB + AC $\neq$ BC และ BC + AC $\neq$ AB แสดงว่าจุดทั้งสามไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 6 จุดสามจุดในแต่ละข้อต่อไปนี้อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

(1) A(-2, 3), B(-6, 1)และ C(-10, -1)

วิธีทำ $AB = \sqrt{(-2+6)^2 + (3-1)^2}$

$= \sqrt{4^2 + 2^2}$

$= \sqrt{16+4}$

$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$BC = \sqrt{(-6+10)^2 + (1+1)^2}$

$= \sqrt{4^2 + 2^2}$

$= \sqrt{16+4}$

$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$AC = \sqrt{(-2+10)^2 + (3+1)^2}$

$= \sqrt{8^2 + 4^2}$

$= \sqrt{64+16}$

$= \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

จะได้ AB + BC = AC

ดังนั้น จุด A, B และ C อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

(2) A(5, 3), B(-2, 2)และ C(-1, 1)

วิธีทำ $AB = \sqrt{(5+2)^2 + (3-2)^2}$

$= \sqrt{7^2 + 1^2}$

$= \sqrt{49+1}$

$= \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(-2+1)^2 + (2-1)^2}$

$= \sqrt{(-1)^2 + 1^2}$

$= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$AC = \sqrt{(5+1)^2 + (3-1)^2}$

$= \sqrt{6^2 + 2^2}$

$= \sqrt{36+4}$

$= \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

จะได้ AB + BC $\neq$ AC และ AB + AC $\neq$ BC

และ BC + AC $\neq$ AB

ดังนั้น จุด A, B และ C ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

ใบงานที่ 1.1

(1) A(0, 0) และ B(-3, 4)	(6) P(-2, 4) และ Q(5, 7)
(2) A(1, -2) และ B(0, 0)	(7) P(1, 2) และ Q(4, 6)
(3) A(-5, 0) และ B(4, 0)	(8) P(5, -4) และ Q(13, 2)
(4) A(3, 2) และ B(3, 5)	(9) P(-4, 8) และ Q(7, 5)
(5) A(-5, -2) และ B(2, -2)	(10) P(-4, -5) และ Q(8, -3)

2. จงแสดงว่าจุด A(2, 3), B(9, 2) และ C(5, 6) เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

3. จงแสดงว่าจุด P(-1, -2), B(5, -2) และ C(2, 2) เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

sm.tm

4. วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุด(2, 3) และวงกลมนี้ผ่านจุด (5, 7) จงหาความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมวงนี้

5. จงหาจุดบนแกน X ซึ่งอยู่ห่างจากจุด P(5, 9) และ Q(-2, -4) เป็นระยะเท่ากัน

6. กำหนด A(-2, -2), B(4, -2), C(4, 4) และ D(-2, 4) เป็นจุดยอดสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง จงหาความยาวของเส้นรอบรูป และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้

7. จุดสามจุดในแต่ละข้อต่อไปนี้อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

(1) A(1, 2), B(4, 3) และ C(7, 4)

(2) P(-2, -8), Q(1, -3) และ R(5, 5)

sm.tm

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

เรื่อง **เรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

หาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุดได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกสูตรการหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุดได้
2. หาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุดได้

2. แนวความคิดหลัก(สาระสำคัญ)

การหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุดใดๆในระนาบ

3. เนื้อหาสาระ

ถ้า $P(\bar{x}, \bar{y})$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ แล้ว

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ และ } \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

หรือ $P(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ให้นักเรียนทบทวนความรู้เกี่ยวกับระนาบพิกัดฉากและการลงจุด
2. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาระยะระหว่างจุดสองจุด
3. แบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มๆ ละ 4-5 คน แล้วให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้ที่ 1.2 เรื่องการหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด แล้วสรุปสูตรการหาจุดกึ่งระยะระหว่างจุดสองจุด
4. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้ เกี่ยวกับการหาจุดกึ่งระยะระหว่างจุดสองจุด
5. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 1.2

5. แหล่งการการเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 1.2
2. ใบงานที่ 1.2
3. หนังสือ
4. แผ่นใส

6. กระบวนการวัดผลประเมินผล

สิ่งที่วัดผล	วิธีวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
1. ด้านความรู้	1. ตรวจใบงาน 2. ทดสอบ	1. ใบงานที่ 1.2 2. แบบทดสอบ	1. ทำถูกอย่างน้อย 95 % 2. ทำถูกอย่างน้อย 95 %
2. ด้านทักษะ	สังเกตจากการบอกหรือการสรุป	แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 90 %
3. ด้านคุณลักษณะ	สังเกต	แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 90 %

7. บันทึกหลังสอน

……..
………………………..……………………………………………………………………………..….
………..…………………………………………………………………………………………………...
……..

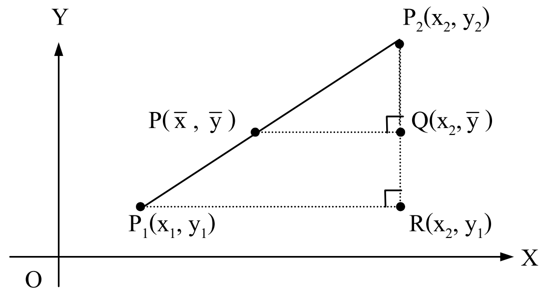
8. กิจกรรมเสนอแนะ

……..
…………………………...………………………………………………………………………………...
………….…………..……………………………………………………………………………...….
……..

ใบความรู้ที่ 1.2 (ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์)

จุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุด

กำหนดจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดในระนาบ ต้องการหา $P(\bar{x}, \bar{y})$ ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด P_1 และ P_2 หาได้ดังนี้



จากรูป $\triangle P_2PQ \sim \triangle P_2P_1R$

จะได้ $\dfrac{P_2P}{P_2P_1} = \dfrac{PQ}{P_1R} = \dfrac{P_2Q}{P_2R} = \dfrac{1}{2}$

$$\frac{PQ}{P_1R} = \frac{x_2 - \bar{x}}{x_2 - x_1} = \frac{1}{2}$$

$$2x_2 - \bar{x} = x_2 - x_1$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\frac{P_2Q}{P_2R} = \frac{y_2 - \bar{y}}{y_2 - y_1} = \frac{1}{2}$$

$$2y_2 - \bar{y} = y_2 - y_1$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

นั่นคือ ถ้า $P(\bar{x}, \bar{y})$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ แล้ว

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ และ } \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

หรือ $\boxed{P(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)}$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดแต่ละคู่ต่อไปนี้

(1) $A(1, 2)$ และ $B(3, 4)$

วิธีทำ ให้ $P(\bar{x}, \bar{y})$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด A และ B

$$\bar{x} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\bar{y} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

ดังนั้น $P(\bar{x}, \bar{y}) = (2, 3)$

(2) $A(\frac{1}{2}, 2)$ และ $B(3, -1)$

วิธีทำ ให้ $P(\bar{x}, \bar{y})$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด A และ B

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{2}+3}{2} = \frac{\frac{7}{2}}{2} = \frac{7}{4}$$

$$\bar{y} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น $P(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{7}{4}, \frac{1}{2})$

(3) $A(-5, 7)$ และ $B(1, -2)$

………………………………………………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

(4) $A(3, -\frac{5}{2})$ และ $B(-3, -9)$

………………………………………………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

ตัวอย่างที่ 2 ถ้า (-3, 8) และ (8, 3) เป็นจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่ง แล้วจงหาจุดศูนย์กลางของวงกลมวงนี้

วิธีทำ เนื่องจากจุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่กึ่งกลางระหว่างจุดปลายทั้งสองของวงกลมวงนี้

ให้ $P(\bar{x}, \bar{y})$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด (-3, 8) และ (8, 3)

จะได้ $\bar{x} = \dfrac{-3+8}{2} = \dfrac{5}{2}$

$\bar{y} = \dfrac{8+3}{2} = \dfrac{11}{2}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลมวงนี้ คือ $(\frac{5}{2}, \frac{11}{2})$

ตัวอย่างที่ 3 ถ้าจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่งเป็น (3, 1) และมีจุดปลายข้างหนึ่งเป็น (5, -7) จงหาจุดปลายอีกข้างหนึ่ง

วิธีทำ จากโจทย์ กำหนด $P(\bar{x}, \bar{y}) = P(3, 1)$ และ $P_1(x_1, y_1) = P_1(5, -7)$

ให้ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดที่ต้องการหา

เนื่องจาก $P(\bar{x}, \bar{y})$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด P_1 และ P_2

จาก $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

จะได้ $3 = \dfrac{5 + x_2}{2}$

$6 = 5 + x_2$

$\therefore\ x_2 = 6 - 5 = 1$

และ $\bar{y} = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

$1 = \dfrac{-7 + y_2}{2}$

$2 = -7 + y_2$

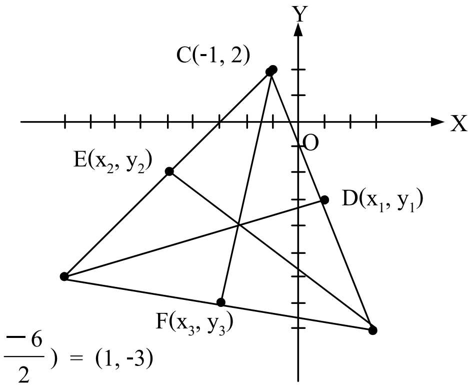
$\therefore\ y_2 = 2 + 7 = 9$

ดังนั้น จุดปลายอีกข้างหนึ่ง คือ (1, 9)

ตัวอย่างที่ 4 จงหาพิกัดของจุดปลายเส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ A(-9, -6), B(3, -8) และ C(-1, 2)

วิธีทำ จุดปลายเส้นมัธยฐาน คือ จุดกึ่งกลางของด้านทั้งสาม

เส้นมัธยฐาน คือ เส้นที่รากจากจุดยอดมาแบ่งครึ่งฐาน



ให้ D เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC

จะได้ พิกัดของจุด D คือ $(\dfrac{3-1}{2}, \dfrac{-8+2}{2}) = (\dfrac{2}{2}, \dfrac{-6}{2}) = (1, -3)$

ให้ E เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน CA

จะได้ พิกัดของจุด E คือ $(\dfrac{-1-9}{2}, \dfrac{2-6}{2}) = (\dfrac{-10}{2}, \dfrac{-4}{2}) = (-5, -2)$

ให้ F เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB

จะได้ พิกัดของจุด F คือ $(\dfrac{-9+3}{2}, \dfrac{-6-8}{2}) = (\dfrac{-6}{2}, \dfrac{-14}{2}) = (-3, -7)$

ดังนั้น พิกัดของจุดปลายเส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยมนี้ คือ (1, -3), (-5, -2) และ (-3, -7)

ใบงานที่ 1.2

1. จงหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดแต่ละคู่ต่อไปนี้

(1) A(0, 0) และ B(6, 8)

(2) A(1, 2) และ B(7, 6)

(3) A(-3, 4) และ B(5, -6)

(4) P(-3, -4) และ Q(6, -7)

(5) P(-2, -3) และ Q(-2, 3)

(6) P$(\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$ และ Q$(-2\frac{1}{2}, -7\frac{1}{2})$

2. ถ้า C(2, 3) เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด A(-2, 0) และ B(x, y) จงหา B(x, y)

3. กำหนดจุด (-3, 2) และจุด (5, 8) เป็นจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่ง จงหาจุดศูนย์กลางของวงกลมวงนี้

4. วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (-1, 2) ถ้าจุดปลายเส้นผ่านศูนย์กลางข้างหนึ่งของวงกลมวงนี้อยู่ที่จุด (-3, -2) แล้ว จงหาจุดปลายเส้นผ่านศูนย์กลางอีกข้างหนึ่งของวงกลมวงนี้

sm.tm

5. กำหนด A(5, 6), B(-2, -2) และ C(4, 2) เป็นจุดยอดมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC ถ้า E และ F เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB และ AC ตามลำดับ จงแสดงว่า $EF = \frac{1}{2}BC$

………
………
………
………
………
………
………

6. ถ้าจุด D(1, 3), E(3, 6) และ F(-1, 5) เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB, BC และ CA ของรูปสามเหลี่ยม ABC ตามลำดับ แล้ว จงหาพิกัดของจุด A, B และ C

………
………
………
………
………
………
………
………

7. ถ้า A(6, 5) และ B(2, 1) จงหาจุดที่แบ่งส่วนของเส้นตรง AB ออกเป็น 4 ส่วนเท่าๆกัน

………
………
………
………
………
………
………
………

8. ถ้า A(-3, 1), B(5, 7) และ C(1, 11) เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ABC จงหาจุดปลายของเส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยมนี้

………
………
………
………
………
………
………
………
………
……sm.tm

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

เรื่อง **เรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

หาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุดได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกบทนิยามความชันของเส้นตรงได้
2. หาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุดสองจุดได้

2. แนวความคิดหลัก(สาระสำคัญ)

การหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุดสองจุดใดๆในระนาบเมื่อเส้นตรงนั้นไม่ขนานกับแกน Y

3. เนื้อหาสาระ

ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$ และ m เป็นความชันของเส้นตรง L

$$\text{จะได้} \quad m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad \text{หรือ} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ความชันบอกลักษณะของเส้นตรงได้ดังนี้

(1) ถ้า $m = 0$ แล้ว เส้นตรงจะขนานกับแกน X

(2) ถ้าหาความชันไม่ได้ แล้ว เส้นตรงจะขนานกับแกน Y

(3) ถ้า $m > 0$ แล้วเส้นตรงทำมุมแหลมกับแกน X เมื่อวัดมุมทวนเข็มนาฬิกาจากแกน X

(4) ถ้า $m < 0$ แล้วเส้นตรงทำมุมป้านกับแกน X เมื่อวัดมุมทวนเข็มนาฬิกาจากแกน X

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ให้นักเรียนทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาระยะระหว่างจุดสองจุด
2. แบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มๆ ละ 4 - 5 คน แล้วให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้ที่ 1.3 เรื่องการหาความชันแล้วสรุปสูตรการหาความชันของเส้นตรงที่ลากผ่านจุดสองจุด
3. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้เกี่ยวกับการหาความชันของเส้นตรงที่ลากผ่านจุดสองจุด
4. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้เกี่ยวกับการหาความชันนำไปใช้แก้โจทย์ปัญหา
5. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 1.3

5. แหล่งการการเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 1.3
2. ใบงานที่ 1.3
3. หนังสือ
4. แผ่นใส

6. กระบวนการวัดผลประเมินผล

สิ่งที่วัดผล	วิธีวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
1. ด้านความรู้	1. ตรวจใบงาน 2. ทดสอบ	1. ใบงานที่ 1.3 2. แบบทดสอบ	1. ทำถูกอย่างน้อย 95 % 2. ทำถูกอย่างน้อย 95 %
2. ด้านทักษะ	สังเกตจากการบอกหรือการสรุป	แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 90 %
3. ด้านคุณลักษณะ	สังเกต	แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 90 %

7. บันทึกหลังสอน

………..
………..
………..
………..
………..

8. กิจกรรมเสนอแนะ

………..
………..
………..
………..
………..

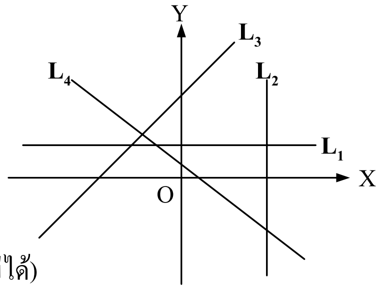
ใบความรู้ที่ 1.3 (ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์)

ความชันของเส้นตรง

บทนิยาม ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$ และ m เป็นความชันของเส้นตรง L

จะได้ $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

จากบทนิยาม $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



ความชันบอกลักษณะของเส้นตรงได้ดังนี้

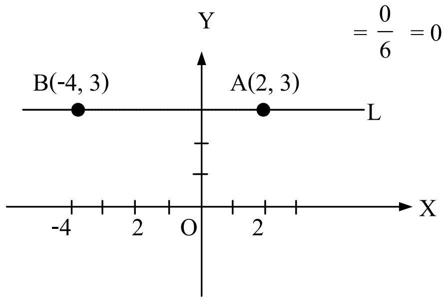
1. ถ้า $m = 0$ แล้ว เส้นตรงจะขนานกับแกน X (จากรูป L_1 มีความชันเป็น 0)
2. ถ้าหาความชันไม่ได้ แล้ว เส้นตรงจะขนานกับแกน Y (จากรูป L_2 หาความชันไม่ได้)
3. ถ้า $m > 0$ แล้วเส้นตรงทำมุมแหลมกับแกน X เมื่อวัดมุมทวนเข็มนาฬิกาจากแกน X (จากรูป L_3 ความชันมากกว่า 0)
4. ถ้า $m < 0$ แล้วเส้นตรงทำมุมป้านกับแกน X เมื่อวัดมุมทวนเข็มนาฬิกาจากแกน X (จากรูป L_4 ความชันน้อยกว่า 0)

ตัวอย่างที่ 1 จงหาความชันของเส้นตรงที่ลากผ่านจุดในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) A(2, 3) และ B(-4, 3)

วิธีทำ ความชันของ AB หรือ $m_{AB} = \dfrac{3-3}{2+4}$

$= \dfrac{0}{6} = 0$

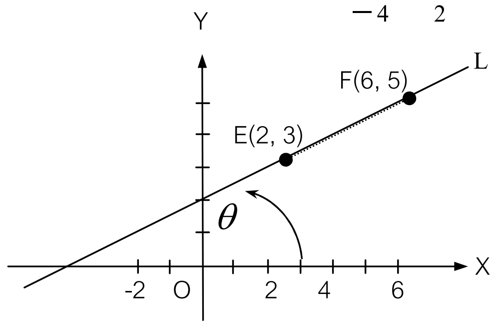


$m = 0$

(3) E(2, 3) และ F(6, 5)

วิธีทำ ความชันของ EF หรือ $m_{EF} = \dfrac{3-5}{2-6}$

$= \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2}$

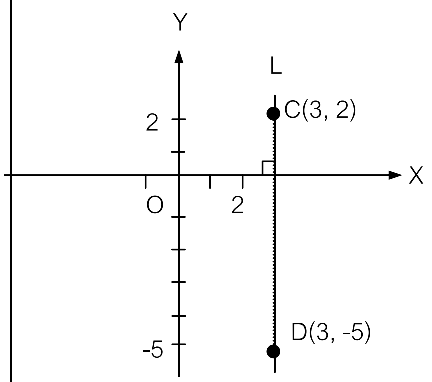


$m > 0$

(2) C(3, 2) และ D(3, -5)

วิธีทำ ความชันของ CD หรือ $m_{CD} = \dfrac{2+5}{3-3}$

$= \dfrac{7}{0}$ หาค่าความชันไม่ได้

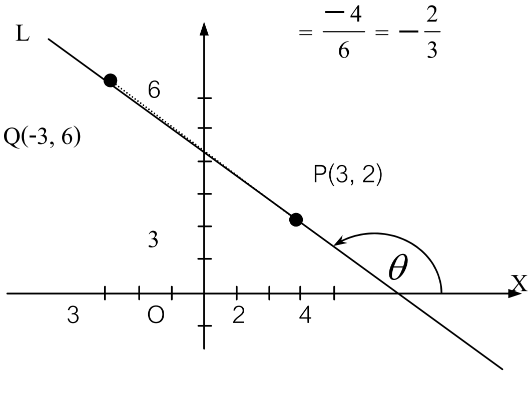


หาค่าความชันไม่ได้

(4) P(3, 2) และ Q(-3, 6)

วิธีทำ ความชันของ PQ หรือ $m_{PQ} = \dfrac{2-6}{3+3}$

$= \dfrac{-4}{6} = -\dfrac{2}{3}$



$m < 0$

จากตัวอย่างที่ 1 ดังกล่าวสังเกตได้ว่า

1. ถ้า $\theta = 0^\circ$ ความชันของเส้นตรงมีค่าเป็นศูนย์
2. ถ้า $\theta = 90^\circ$ หาค่าความชันไม่ได้
3. ถ้า $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ความชันของเส้นตรงมีค่าเป็นบวก
4. ถ้า $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ความชันของเส้นตรงมีค่าเป็นลบ

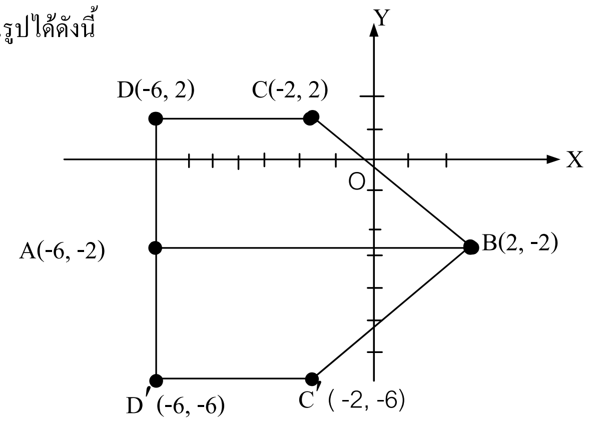
ตัวอย่างที่ 2 ถ้าเส้นตรงที่ผ่านจุด A(5, 6) และ B(9, k) มีความชันเท่ากับ $\frac{1}{2}$ จงหาค่า k

วิธีทำ จาก ความชัน $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

จะได้
$$\frac{1}{2} = \frac{6-k}{5-9}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{6-k}{-4}$$
$$2(6 - k) = -4$$
$$12 - 2k = -4$$
$$-2k = -16$$
$$\therefore k = 8$$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด A(-6, -2), B(2, -2), C และ D เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู มีด้าน AB เป็นฐานที่ยาวเป็นสองเท่าของด้านคู่ขนาน DC และมีมุม A เป็นมุมฉาก มีพื้นที่ 24 ตารางหน่วย จงหาความชันของ BC

วิธีทำ จากโจทย์เขียนรูปได้ดังนี้



จาก A(-6, -2), B(2, -2) จะได้ AB = | -6 - 2 | = 8

แต่ AB เป็นฐานที่ยาวเป็นสองเท่าของด้านคู่ขนาน DC จะได้ DC = 4

เนื่องจาก พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมู = $\frac{1}{2}$(ผลบวกของด้านคู่ขนาน) $\times$ สูง

$$24 = \frac{1}{2} \times (AB + DC) \times \text{สูง}$$
$$24 = \frac{1}{2} \times (8 + 4) \times \text{สูง}$$
$$24 = 6 \times \text{สูง}$$
$$\therefore \text{สูง} = 4$$

จะได้ จุด D(-6, 2) และ C(-2, 2)

หรือ D′(-6, -6) และ C′(-2, -6)

ดังนั้น $m_{BC} = \frac{-2-2}{2+2} = \frac{-4}{4} = -1$

หรือ $m_{BC} = \frac{-2+6}{2+2} = \frac{4}{4} = 1$

ใบงานที่ 1.3

1. จงหาความชันของเส้นตรงที่ลากผ่านจุดในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) A(0, 0) และ B(-3, 4) ………………………… ………………………… …………………………	(5) P(2, 5) และ Q(-7, 5) ………………………… ………………………… …………………………
(2) A(0, 0) และ B(-6, -9) ………………………… ………………………… …………………………	(6) P(-6, 4) และ Q(-6, -3) ………………………… ………………………… …………………………
(3) A(-2, 3) และ B(-4, 8) ………………………… ………………………… …………………………	(7) P(3, -8) และ Q(-5, 7) ………………………… ………………………… …………………………
(4) A(-2, -6) และ B(3, -1) ………………………… ………………………… …………………………	(8) P(t + 1, s) และ Q(2t, s - 3) ………………………… ………………………… …………………………

2. จงหาค่า x ที่ทำให้เส้นตรงที่ผ่านจุด P และ Q มีความชันเท่ากับ m ตามที่กำหนดให้

(1) P(6, -3) และ Q(9, x) ; $m = -\frac{2}{3}$ ………………………… ………………………… ………………………… …………………………	(2) P(x, 12) และ Q(5, 12) ; $m = 0$ ………………………… ………………………… ………………………… …………………………

3. ถ้าเส้นตรงที่ลากผ่านจุด C(3, -2) และ D(3x - 2, 4x) มีความชันเท่ากับ -3 จงหาค่า x

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

4. ถ้าเส้นตรงที่ลากผ่านจุด A(x, 5) และ B(-2, 8) มีความชันเท่ากับ $-\frac{3}{2}$ จงหาค่า x

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………sm.tm

5. ถ้าเส้นตรงที่ลากผ่านจุด P(-4, 3) และ Q(2, y) มีความชันเท่ากับ 2 จงหาค่า y

………

………

………

………

………

………

………

6. ถ้าเส้นตรงที่ลากผ่านจุด A(2, k) และ B(5, 6) มีความชันเท่ากับเส้นตรงที่ลากผ่านจุด C(-2, 1) และ D(1, 5) จงหาค่า k

………

………

………

………

………

………

………

………

7. ให้ A(2, 4), B(-5, 4) และ C(7, 8) เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ถ้า P(a, b) เป็นจุดปลายเส้นมัธยฐานที่ลากจากจุด A มายัง BC จงหาความชันของเส้นมัธยฐานนี้

………

………

………

………

………

………

………

………

8. กำหนด A(-2, -2), B(4, -2), C(x, y) และ D(-2, 2) เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู โดยมี AB เป็นฐาน ซึ่งยาวเป็นสองเท่าของความยาว CD จงหาความชันของ BC

………

………

………

………

………

………

………

………

………

……………………………………………………………………………………………………sm.tm

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

เรื่อง **เรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. บอกได้ว่าเส้นตรงสองเส้นที่กำหนดให้ขนานกันหรือไม่ได้
2. บอกได้ว่าเส้นตรงสองเส้นที่กำหนดให้ตั้งฉากกันหรือไม่ได้
3. นำความรู้เกี่ยวกับเส้นขนานและเส้นตั้งฉากไปใช้แก้โจทย์ปัญหาได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกทฤษฎีบทของเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกันได้
2. บอกได้ว่าเส้นตรงสองเส้นที่กำหนดให้ขนานกันหรือไม่ได้
3. บอกทฤษฎีบทของเส้นตรงสองเส้นที่ตั้งฉากกันได้
4. บอกได้ว่าเส้นตรงสองเส้นที่กำหนดให้ตั้งฉากกันหรือไม่ได้

2. แนวความคิดหลัก (สาระสำคัญ)

เส้นขนาน

ทฤษฎีบท เส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกับแกน Y จะขนานกันก็ต่อเมื่อความชันของเส้นตรงทั้งสองเท่ากัน

เส้นตั้งฉาก

ทฤษฎีบท เส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกับแกน Y จะตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อผลคูณของความชันของเส้นตรงทั้งสองเท่ากับ -1

3. เนื้อหาสาระ

เส้นขนาน

ทฤษฎีบท เส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกับแกน Y จะขนานกันก็ต่อเมื่อความชันของเส้นตรงทั้งสองเท่ากัน

เส้นตั้งฉาก

ทฤษฎีบท เส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกับแกน Y จะตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อผลคูณของความชันของเส้นตรงทั้งสองเท่ากับ -1

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ให้นักเรียนทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาความชันของเส้นตรง
2. แบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มๆ ละ 4 - 5 คน แล้วให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้ที่ 1.4 แล้วสรุปสูตรเกี่ยวกับการหาเส้นตรงที่ขนานกันและเส้นตรงที่ตั้งฉากกัน
3. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้เกี่ยวกับเส้นตรงที่ขนานกันและเส้นตรงที่ตั้งฉากกันนำไปใช้แก้โจทย์ปัญหาได้
4. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 1.4

5. แหล่งการการเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 1.4
2. ใบงานที่ 1.4
3. หนังสือ
4. แผ่นใส

6. กระบวนการวัดผลประเมินผล

สิ่งที่วัดผล	วิธีวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
1. ด้านความรู้	1. ตรวจใบงาน 2. ทดสอบ	1. ใบงานที่ 1.4 2. แบบทดสอบ	1. ทำถูกอย่างน้อย 95 % 2. ทำถูกอย่างน้อย 95 %
2. ด้านทักษะ	สังเกตจากการบอกหรือการสรุป	แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 90 %
3. ด้านคุณลักษณะ	สังเกต	แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 90 %

7. บันทึกหลังสอน

……..
……..
……..
……..
……..

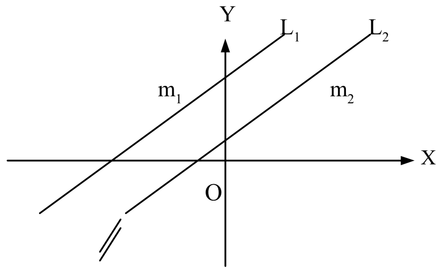
8. กิจกรรมเสนอแนะ

……..
……..
……..
……..
……..

ใบความรู้ที่ 1.4 (ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์)

เส้นขนาน

> **ทฤษฎีบท** เส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกับแกน Y จะขนานกันก็ต่อเมื่อความชันของเส้นตรงทั้งสองเท่ากัน



จากรูป L_1 L_2 ก็ต่อเมื่อ $m_1 = m_2$

ตัวอย่างที่ 1 จงแสดงว่าเส้นตรงที่ลากผ่านจุด A(1, 2) และ B(4, 6) ขนานกับเส้นตรงซึ่งผ่านจุด C(9, -6) และ D(6, -10)

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ $m_{AB} = \frac{2-6}{1-4} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$

และ $m_{CD} = \frac{-6+10}{9-6} = \frac{4}{3}$

$\therefore\ m_{AB} = m_{CD}$

ดังนั้น เส้นตรง AB ขนานกับเส้นตรง CD

ตัวอย่างที่ 2 จงแสดงว่ารูปสี่เหลี่ยม ABCD ที่มีจุดยอด A(6, 8), B(5, 4), C(3, 6) และ D(4, 10) เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ $m_{AB} = \frac{8-4}{6-5} = \frac{4}{1} = 4$

$m_{BC} = \frac{4-6}{5-3} = \frac{-2}{2} = -1$

$m_{CD} = \frac{6-10}{3-4} = \frac{-4}{-1} = 4$

และ $m_{DA} = \frac{10-8}{4-6} = \frac{2}{-2} = -1$

จะเห็นว่า $m_{AB} = m_{CD}$ จะได้ เส้นตรง AB ขนานกับเส้นตรง CD

และ $m_{BC} = m_{DA}$ จะได้ เส้นตรง BC ขนานกับเส้นตรง DA

ดังนั้น แสดงว่ารูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ตัวอย่างที่ 3 จงแสดงว่าจุด A(-2, 3), B(-6, 1)และ C(-10, -1) อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ $m_{AB} = \frac{3-1}{-2+6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

และ $m_{BC} = \frac{1+1}{-6+10} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

นั่นคือ $m_{AB} = m_{BC}$

ดังนั้น จุด A(-2, 3), B(-6, 1)และ C(-10, -1) อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

หมายเหตุ ถ้าเส้นตรงสองเส้นมีความชันเท่ากันและมีจุดร่วมกัน 1 จุด แล้ว เส้นตรงทั้งสองจะเป็นเส้นตรงเดียวกัน จากตัวอย่างที่ 3 เราจะหา m_{AB} และ m_{AC} **หรือ** m_{AC} และ m_{BC} ก็ได้

ตัวอย่างที่ 4 จงพิจารณาว่าจุด A(5, 3), B(-2, 2) และ C(-1, 1) อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ $m_{AB} = \frac{3-2}{5+2} = \frac{1}{7}$

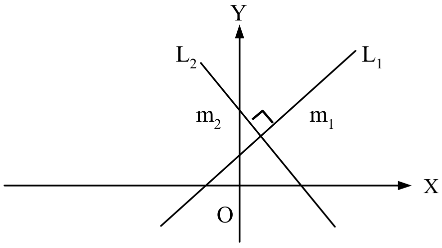
และ $m_{AC} = \frac{3-1}{5+1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

นั่นคือ $m_{AB} \neq m_{AC}$

ดังนั้น จุด A(5, 3), B(-2, 2) และ C(-1, 1) **ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน**

เส้นตั้งฉาก

> **ทฤษฎีบท** เส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกับแกน Y จะตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อ ผลคูณของความชันของเส้นตรงทั้งสองเท่ากับ -1



จากรูป L_1 ตั้งฉากกับ L_2 ก็ต่อเมื่อ $m_1 m_2 = -1$

ตัวอย่างที่ 5 จงแสดงว่าเส้นตรงที่ลากผ่านจุด A(1, 2) และ B(4, 6) ตั้งฉากกับเส้นตรงซึ่งผ่านจุด C(-9, 6) และ D(-5, 3)

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ $m_{AB} = \frac{2-6}{1-4} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$

และ $m_{CD} = \frac{6-3}{-9+5} = -\frac{3}{4}$

$\therefore\ m_{AB}\, m_{CD} = (\frac{4}{3})(-\frac{3}{4}) = -1$

ดังนั้น เส้นตรง AB ตั้งฉากกับเส้นตรง CD

ตัวอย่างที่ 6 ถ้าความชันของเส้นตรง L_1 เท่ากับ $-\frac{3}{2}$ และตั้งฉากกับเส้นตรง L_2 แล้ว เส้นตรง L_2 จะมีความชันเท่าใด

วิธีทำ จากโจทย์ ความชันของเส้นตรง L_1 เท่ากับ $-\frac{3}{2}$ แต่เส้นตรง L_1 และ เส้นตรง L_2 ตั้งฉากกัน

ฉะนั้น ผลคูณของเส้นตรงเส้นตรงทั้งสองเท่ากับ -1

ให้ความชันของเส้นตรง $L_2 = m$

จะได้ $m \times (-\frac{3}{2}) = -1$

$\therefore\ m = (-1) \times (-\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$

ดังนั้น เส้นตรง L_2 จะมีความชันเท่ากับ $\frac{2}{3}$

ตัวอย่างที่ 7 ถ้าเส้นตรงที่ผ่านจุด A(k, 7) และ B(-3, -2) ตั้งฉากกับเส้นตรงที่ผ่านจุด C(3, 2) และ D(1, -4) แล้ว จงหาค่า k

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ $m_{AB} = \frac{7+2}{k+3} = \frac{9}{k+3}$ และ $m_{CD} = \frac{2+4}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$

ฉะนั้น $m_{AB}\, m_{CD} = -1$

$(\frac{9}{k+3})(3) = -1$

$k + 3 = -27$

$\therefore\ k = -30$

ตัวอย่างที่ 8 จงพิจารณาว่าในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่

(1) A(1, 1), B(-1, -1) และ C(-4, 2)

วิธีทำ จะได้ $m_{AB} = \frac{1+1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$

$m_{AC} = \frac{1-2}{1+4} = -\frac{1}{5}$

และ $m_{BC} = \frac{-1-2}{-1+4} = \frac{-3}{3} = -1$

จะได้ $m_{AB}\, m_{BC} = (1)(-1) = -1$

ดังนั้น แสดงว่า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและมี $\hat{B} = 90^\circ$

(2) A(2, 6), B(4, 1) และ C(-1, -2)

วิธีทำ จะได้ $m_{AB} = \frac{6-1}{2-4} = -\frac{5}{2}$

$m_{AC} = \frac{6+2}{2+1} = \frac{8}{3}$

และ $m_{BC} = \frac{1+2}{4+1} = \frac{3}{5}$

เนื่องจาก**ไม่มี**ผลคูณของความชันคู่ใดเท่ากับ -1

ดังนั้น แสดงว่า ABC **ไม่เป็น**รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ใบงานที่ 1.4

1.จงแสดงว่าเส้นตรงที่ลากผ่านจุด A(5, 3) และ B(2, -3) ขนานกับเส้นตรงซึ่งผ่านจุด C(-5, -6) และ D(1, 6)

2. ถ้าเส้นตรงที่ผ่านจุด A(4, 6) และ B(a - 2, -3) ขนานกับเส้นตรงซึ่งผ่านจุด C(2, 4) และ D(5, -1) จงหาค่า a

3. จุด P(1, 2) และ Q(6, 7) และ R(-3, 4) อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

4. จงแสดงว่า A(-2, 3), B(4, 5), C(2, 9) และ D(-1, 8) เป็นจุดยอดมุมของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

5. กำหนด A(5, 6), B(-1, 2) และ C(7, 0) เป็นจุดยอดมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC ถ้า D และ E เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB และ AC ตามลำดับแล้วจงแสดงว่า DE ขนานกับ BC และ DE = $\frac{1}{2}$BC

sm.tm

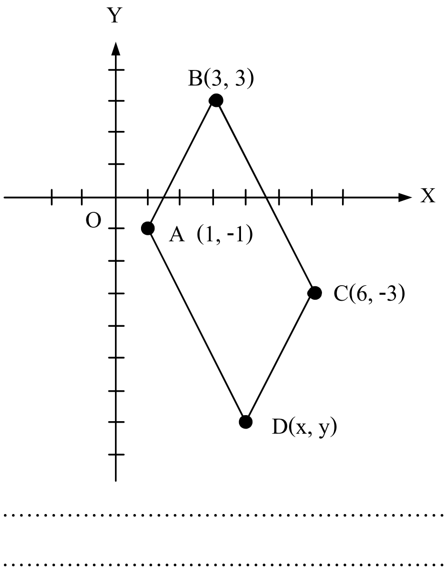
6. กำหนด A(-3, -1), B(5, 3), C(3, 5) และ D(1, 7) เป็นจุดยอดมุมของรูปสี่เหลี่ยม ABCD ถ้า P, Q, R และ S เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB, BC, CD และ DA ตามลำดับ แล้วจงแสดงว่า PQRS เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

7. จงแสดงว่าส่วนของเส้นตรงที่ลากเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้าน 2 ด้านของรูปสามเหลี่ยมใดๆ ย่อมขนานและยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านที่เหลือ

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

8. จากรูป ถ้า ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยมี AB ขนานกับ CD และ BC ขานากับ AD จงหา D(x, y)



……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………….sm.tm

9. จงหาความชันของเส้นตรงที่ลากมาตั้งฉากกับเส้นตรงที่ลากผ่านจุด A(-2, 3) และ B(4, -5)

10. จงแสดงว่าเส้นตรงที่ลากผ่านจุด A(1, 3) และ B(6, 5) ตั้งฉากกับเส้นตรงที่ลากผ่านจุด C(-1, -3) และ D(-3, 2)

11. ถ้าเส้นตรงที่ลากผ่านจุด A(4, 1) และ B(1, 4) ตั้งฉากกับเส้นตรงที่ลากผ่านจุด C(x, 5) และ D(-2, 6) แล้วจงหาค่า x

12. กำหนด A(a, b) และ B(-b, a) เมื่อ $a^2 + b^2 \neq 0$ จงแสดงว่าส่วนของเส้นตรง OA ตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรง OB เมื่อ O เป็นจุดกำเนิด

13. ถ้า A(-2, 1), B(5, 5) และ C(9, y) เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่งมี $A\hat{B}C$ เป็นมุมฉาก

sm.tm

14. จงแสดงว่า A(-1, 5), B(2, 1) และ C(6, 4) เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

15. จงแสดงว่า A(2, 1), B(6, 4), C(6, 8) และ D(-1, 5) เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD นี้ด้วย

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

16. จงแสดงว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสย่อมตั้งฉากซึ่งกันและกัน

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

17. จงแสดงว่าจุด A(5, 5) อยู่บนเส้นตรงที่ตั้งฉากและแบ่งครึ่งของของเส้นตรงที่มีจุดปลายที่ P(3, 5) และ Q(5, 3)

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

18. ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด A(6, -3) และ B(4, 2) จงหาความชันของเส้นตรงที่มีความยาวน้อยที่สุดที่เชื่อมระหว่างจุดกำเนิดและจุดบนเส้นตรง L

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………….sm.tm

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5

เรื่อง **เรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. หาสมการเส้นตรงในลักษณะต่างๆ ได้
2. หาความชันของเส้นตรงจากสมการเส้นตรงได้
3. นำความรู้เกี่ยวกับการหาความชันของเส้นตรงไปใช้แก้โจทย์ปัญหาได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. หาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นเส้นตรงกรณีที่เส้นตรงนั้นขนานกับแกน X ได้
2. หาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นเส้นตรงกรณีที่เส้นตรงนั้นขนานกับแกน Y ได้
3. หาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นเส้นตรงกรณีที่เส้นตรงนั้นไม่ขนานกับแกน X และไม่ขนานกับแกน Y ได้
4. หาความชันของสมการเส้นตรงได้
5. หาจุดที่สมการเส้นตรงตัดแกน X และตัดแกน Y ได้
6. หาสมการเส้นตรงในลักษณะต่างๆ ได้

2. แนวความคิดหลัก(สาระสำคัญ)

การหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นเส้นตรงกรณีที่เส้นตรงนั้นขนานกับแกน X
การหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นเส้นตรงกรณีที่เส้นตรงนั้นขนานกับแกน Y
การความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นเส้นตรงกรณีที่เส้นตรงนั้นไม่ขนานกับแกน X และไม่ขนานกับแกน Y
การหาความชันของสมการเส้นตรง การหาจุดที่สมการเส้นตรงตัดแกน X และตัดแกน Y
การหาสมการเส้นตรงในลักษณะต่างๆ

3. เนื้อหาสาระ

ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรง

ในการเขียนความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงในลักษณะต่างๆ นิยมเขียนเฉพาะสมการที่ระบุเงื่อนไขของความสัมพันธ์เท่านั้น ซึ่งสมการเส้นตรงมีดังนี้

ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงขนานกับแกน X คือ $\{(x, y) \in R \times R \mid y = b\}$ **ซึ่งนิยมเขียน** $y = b$
เป็นเส้นตรงตั้งฉากกับแกน Y และตัดแกน Y ที่จุด (0, b)

ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงขนานกับแกน Y คือ $\{(x, y) \in R \times R \mid x = a\}$ **ซึ่งนิยมเขียน** $x = a$
เป็นเส้นตรงตั้งฉากกับแกน X และตัดแกน X ที่จุด (a, 0)

ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่ไม่ขนานกับแกน X และไม่ขนานกับแกน Y

ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่มีความชัน m และผ่านจุด (x_1, y_1) คือ
$\{(x, y) \in R \times R \mid y - y_1 = m(x - x_1)\}$ **นิยมเขียน** $y - y_1 = m(x - x_1)$

ถ้าเส้นตรงผ่านจุด 2 จุด คือ (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) จะได้สมการเส้นตรงคือ $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ถ้าเส้นตรงมีความชัน m และมีระยะตัดแกน Y (Y - intercept) เท่ากับ c (ตัดแกน Y ที่จุด (0, c)
จะได้สมการเส้นตรง คือ $y = mx + c$

รูปทั่วไป (General Form) ของเส้นตรง $Ax + By + C = 0$ เมื่อ A, B,C เป็นค่าคงตัว และ A, B
ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน จะได้ ความชัน (m) $= -\dfrac{A}{B}$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ให้นักเรียนทบทวนความรู้เกี่ยวกับความชัน เส้นขนาน เส้นตั้งฉาก

2. แบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มๆ ละ 4 - 5 คน แล้วให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้ที่ 1.5 แล้วสรุปการหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงลักษณะต่างๆ

3. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้แล้วนำความรู้เกี่ยวกับการหาความชันของเส้นตรงไปใช้ แก้โจทย์ปัญหาได้

4. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 1.5

5. แหล่งการการเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 1.5
2. ใบงานที่ 1.5
3. หนังสือ
4. แผ่นใส

6. กระบวนการวัดผลประเมินผล

สิ่งที่วัดผล	วิธีวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
1. ด้านความรู้	1. ตรวจใบงาน 2. ทดสอบ	1. ใบงานที่ 1.5 2. แบบทดสอบ	1. ทำถูกอย่างน้อย 95 % 2. ทำถูกอย่างน้อย 95 %
2. ด้านทักษะ	สังเกตจากการบอกหรือการสรุป	แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 90 %
3. ด้านคุณลักษณะ	สังเกต	แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 90 %

7. บันทึกหลังสอน

……..
……..
……..
……..

8. กิจกรรมเสนอแนะ

……..
……..
……..
……..

ใบความรู้ที่ 1.5 (ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์)

ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรง

ในการเขียนความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงในลักษณะต่างๆ นิยมเขียนเฉพาะสมการที่ระบุเงื่อนไขของความสัมพันธ์เท่านั้น ซึ่งสมการเส้นตรงมีดังนี้

1. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงขนานกับแกน X คือ $\{ (x, y) \in R \times R \mid y = b \}$ **ซึ่งนิยมเขียน** $y = b$ เป็นเส้นตรงตั้งฉากกับแกน Y และตัดแกน Y ที่จุด $(0, b)$

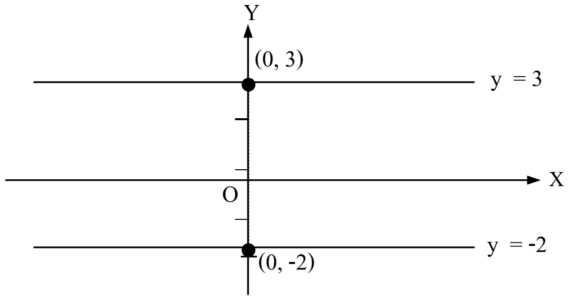
1.1 ถ้า $b > 0$ (b เป็นจำนวนจริงบวก) เป็นเส้นตรงอยู่เหนือแกน X และห่างจากแกน X เป็นระยะ b หน่วย

1.2 ถ้า $b < 0$ (b เป็นจำนวนจริงลบ) เป็นเส้นตรงอยู่ใต้แกน X และห่างจากแกน X เป็นระยะ $|b|$ หน่วย

1.3 ถ้า $b = 0$ จะได้สมการ $y = 0$ คือ แกน X

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนกราฟของ $y = 3$ และ $y = -2$

วิธีทำ



2. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงขนานกับแกน Y คือ $\{ (x, y) \in R \times R \mid x = a \}$ **ซึ่งนิยมเขียน** $x = a$ เป็นเส้นตรงตั้งฉากกับแกน X และตัดแกน X ที่จุด $(a, 0)$

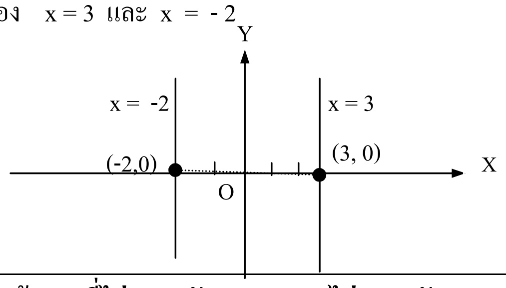
2.1 ถ้า $a > 0$ (a เป็นจำนวนจริงบวก) เป็นเส้นตรงอยู่ทางขวาของแกน Y และห่างจากแกน Y เป็นระยะ a หน่วย

2.2 ถ้า $a < 0$ (a เป็นจำนวนจริงลบ) เป็นเส้นตรงอยู่ทางซ้ายของแกน Y และห่างจากแกน Y เป็นระยะ $|a|$ หน่วย

2.3 ถ้า $a = 0$ จะได้ สมการ $x = 0$ คือ แกน Y

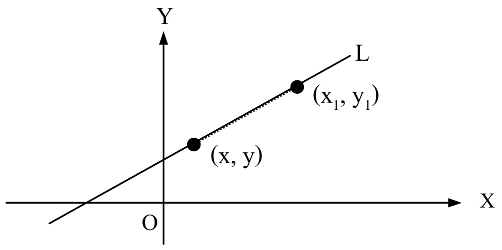
ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนกราฟของ $x = 3$ และ $x = -2$

วิธีทำ



3. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่ไม่ขนานกับแกน X และไม่ขนานกับแกน Y

ให้ L เป็นเส้นตรงที่ไม่ขนานกับแกน X และไม่ขนานกับแกน Y มีความชัน m และผ่านจุด (x_1, y_1)



ถ้า (x, y) เป็นจุดอื่นๆ บนเส้นตรง L จะได้ $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

จะได้ ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่มีความชัน m และผ่านจุด (x_1, y_1) คือ $\{(x, y) \in R \times R \mid y - y_1 = m(x - x_1) \}$

นิยมเขียน $y - y_1 = m(x - x_1)$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (5, -2) และมีความชัน $m = \frac{2}{3}$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ $x_1 = 5$, $y_1 = -2$ และ $m = \frac{2}{3}$

จากสมการเส้นตรง $y - y_1 = m(x - x_1)$

จะได้ $y + 2 = \frac{2}{3}(x - 5)$

$3y + 6 = 2x - 10$

$2x - 3y - 16 = 0$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ต้องการคือ $2x - 3y - 16 = 0$

4. ถ้าเส้นตรงผ่านจุด 2 จุด คือ (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) เมื่อ (x, y) เป็นจุดอื่นๆ บนเส้นตรงนี้

จะได้สมการเส้นตรงคือ $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (3, 4) และ จุด (-3, 5)

วิธีทำ จาก $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

จะได้ $\frac{y - 4}{x - 3} = \frac{5 - 4}{-3 - 3}$

$\frac{y - 4}{x - 3} = -\frac{1}{6}$

$6(y - 4) = -1(x - 3)$

$6y - 24 = -x + 3$

$x + 6y - 27 = 0$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ต้องการคือ $x + 6y - 27 = 0$

หรือหาสมการเส้นตรงได้ดังนี้

$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4 - 5}{3 + 3} = -\frac{1}{6}$

จาก $y - y_1 = m(x - x_1)$

จะได้ $y - 4 = -\frac{1}{6}(x - 3)$

$6y - 24 = -x + 3$

$x + 6y - 27 = 0$

5. ถ้าเส้นตรงมีความชัน m และมีระยะตัดแกน Y (Y - intercept) เท่ากับ c (ตัดแกน Y ที่จุด (0, c))

จะได้สมการเส้นตรง คือ $y = mx + c$

ตัวอย่างที่ 5 จากสมการเส้นตรง $2x - 3y = 4$ จงหาความชัน และหาจุดตัดแกน X และจุดตัดแกน Y

วิธีทำ จากสมการ $2x - 3y = 4$ จัดให้อยู่ในรูป $y = mx + c$

จะได้ $3y = 2x - 4$

$y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$

หาจุดตัดแกน X ซึ่งเส้นตรงตัดแกน X เมื่อ $y = 0$

จะได้ $2x = 4$

$x = 2$

ดังนั้น เส้นตรงนี้มีความชัน $\frac{2}{3}$ ตัดแกน X ที่จุด (2, 0) และ ตัดแกน Y ที่จุด $(0, -\frac{4}{3})$

6. รูปทั่วไป(General Form) ของเส้นตรง $Ax + By + C = 0$ เมื่อ A, B,C เป็นค่าคงตัว และ A, B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

จะได้ ความชัน (m) $= -\frac{A}{B}$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาความชันของเส้นตรง $2x - 3y = 4$

วิธีทำ จากสมการ $2x - 3y = 4$ หรือ $2x - 3y - 4 = 0$

ซึ่ง $A = 2$ และ $B = -3$ จากความชัน $m = -\frac{A}{B}$

ดังนั้น ความชัน $m = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$

ตัวอย่างที่ 7 จงแสดงว่าเส้นตรง $4x + 3y + 5 = 0$ ขนานกับเส้นตรง $3y = -4x + 7$

วิธีที่ 1 จัดให้สมการอยู่ในรูป $y = mx + c$

จากสมการ $4x + 3y + 5 = 0$

จะได้ $y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$

$\therefore$ เส้นตรง $4x + 3y + 5 = 0$ มีความชัน $-\frac{4}{3}$

จากสมการ $3y = -4x + 7$

จะได้ $y = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$

$\therefore$ เส้นตรง $3y = -4x + 7$ มีความชัน $-\frac{4}{3}$

นั่นคือ เส้นตรงทั้งสองมีความชันเท่ากัน

ดังนั้น เส้นตรงสองเส้นนี้ขนานกัน

วิธีที่ 2 จากสมการ $4x + 3y + 5 = 0$ ซึ่ง $A = 4,\ B = 3$

จากความชัน $(m) = -\frac{A}{B}$

จะได้ ความชัน $= -\frac{4}{3}$

$\therefore$ เส้นตรง $3x + 4y + 5 = 0$ มีความชัน $-\frac{4}{3}$

จากสมการ $3y = -4x + 7$

จะได้ $4x + 3y - 7 = 0$ ซึ่ง $A = 4,\ B = 3$

จะได้ ความชัน $= -\frac{4}{3}$

$\therefore$ เส้นตรง $3y = -4x + 7$ มีความชัน $-\frac{4}{3}$

นั่นคือ เส้นตรงทั้งสองมีความชันเท่ากัน

ดังนั้น เส้นตรงสองเส้นนี้ขนานกัน

ตัวอย่างที่ 8 จงแสดงว่าเส้นตรง $2x + y = 8$ ตั้งฉากกับเส้น $2y - x + 5 = 0$

วิธีที่ 1 จัดให้สมการอยู่ในรูป $y = mx + c$

จากสมการ $2x + y = 8$

จะได้ $y = -2x + 8$

$\therefore$ เส้นตรง $2x + y = 8$ มีความชัน -2

จากสมการ $2y - x + 5 = 0$

จะได้ $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

$\therefore$ เส้นตรง $2y - x + 5 = 0$ มีความชัน $\frac{1}{2}$

จะได้ ผลคูณของความชัน $= (-2)(\frac{1}{2}) = -1$

ดังนั้น เส้นตรงสองเส้นนี้ ตั้งฉากกัน

วิธีที่ 2 จากสมการ $2x + y = 8$ จะได้ $2x + y - 8 = 0$

ซึ่ง $A = 2,\ B = 1$

จากความชัน $(m) = -\frac{A}{B}$

จะได้ ความชัน $= -\frac{2}{1} = -2$

$\therefore$ เส้นตรง $2x + y = 8$ มีความชัน -2

จากสมการ $2y - x + 5 = 0$ ซึ่ง $A = -1,\ B = 2$

จะได้ ความชัน $= -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ เส้นตรง $2y - x + 5 = 0$ มีความชัน $\frac{1}{2}$

จะได้ ผลคูณของความชัน $= (-2)(\frac{1}{2}) = -1$

ดังนั้น เส้นตรงสองเส้นนี้ ตั้งฉากกัน

ตัวอย่างที่ 9 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (2, -3) และขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด (1, 2) และ (3, 5)

วิธีทำ เนื่องจาก เส้นตรงที่ผ่านจุด (1, 2) และ (3, 5) มีความชัน $(m) = \frac{5-2}{3-1} = \frac{3}{2}$

จะได้ สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (2, -3) และขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด (1, 2) และ (3, 5)

ต้องมีความชันเท่ากับ $\frac{3}{2}$

จากสมการเส้นตรง $y - y_1 = m(x - x_1)$

ซึ่ง $(x_1, y_1) = (2, -3)$ และ $m = \frac{3}{2}$

จะได้

$$y + 3 = \frac{3}{2}(x - 2)$$

$$2(y + 3) = 3(x - 2)$$

$$2y + 6 = 3x - 6$$

$$3x - 2y - 12 = 0$$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ต้องการ คือ $3x - 2y - 12 = 0$

ตัวอย่างที่ 10 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (3, 4) และตั้งฉากกับเส้นตรงที่ผ่านจุด (-4, 5) และ (1, 7)

วิธีทำ เส้นตรงที่ผ่านจุด (-4, 5) และ (1, 7) มีความชัน (m) $= \frac{7-5}{1+4} = \frac{2}{5}$

จะได้ สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (3, 4) และตั้งฉากกับเส้นตรงที่ผ่านจุด (-4, 5) และ (1, 7)

ต้องมีความชันเท่ากับ $-\frac{5}{2}$ (เพราะว่า $(\frac{2}{5})(-\frac{5}{2}) = -1$)

จากสมการเส้นตรง $y - y_1 = m(x - x_1)$

ซึ่ง $(x_1, y_1) = (3, 4)$ และ $m = -\frac{5}{2}$

จะได้

$$y - 4 = -\frac{5}{2}(x - 3)$$
$$2(y - 4) = -5(x - 3)$$
$$2y - 8 = -5x + 15$$
$$5x + 2y - 23 = 0$$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ต้องการ คือ $5x + 2y - 23 = 0$

ตัวอย่างที่ 11 ถ้าเส้นตรง $ax + 5y = 4$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $5x + 3y + 9 = 0$ จงหาค่า a

วิธีทำ เส้นตรง $5x + 3y + 9 = 0$ จะได้ $y = -\frac{5}{3}x - 3$

$\therefore$ เส้นตรง $5x + 3y + 9 = 0$ มีความชัน $= -\frac{5}{3}$

แต่เส้นตรง $ax + 5y = 4$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $5x + 3y + 9 = 0$

$\therefore$ เส้นตรง $ax + 5y = 4$ หรือ $y = -\frac{a}{5}x + 4$

ต้องมีความชันเท่ากับ $-\frac{a}{5} = \frac{3}{5}$ (เพราะว่า $(-\frac{5}{3})(\frac{3}{5}) = -1$)

$$\therefore \quad a = (\frac{3}{5})(-5)$$
$$= -3$$

ดังนั้น $a = -3$

ตัวอย่างที่ 12 จงหาสมการเส้นตรงที่ลากผ่านจุดตัดของเส้นตรง $x + y - 5 = 0$ และ $x - y - 3 = 0$ และเส้นตรงนี้ขนานกับเส้นตรง $5x + 6y + 7 = 0$

วิธีทำ หาจุดตัดของเส้นตรง $x + y - 5 = 0$ กับ $x - y - 3 = 0$

โดยการแก้สมการได้ $x = 4$ และ $y = 1$

จะได้ เส้นตรงสองเส้นนี้ตัดกันที่จุด (4, 1)

ลากเส้นตรงผ่านจุด (4, 1) และขนานกับเส้นตรง $5x + 6y + 7 = 0$ จะได้ความชัน(m) $= -\frac{5}{6}$

จากสมการเส้นตรง $y - y_1 = m(x - x_1)$

ซึ่ง $(x_1, y_1) = (4, 1)$ และ $m = -\frac{5}{6}$

จะได้

$$y - 1 = -\frac{5}{6}(x - 4)$$
$$6(y - 1) = -5(x - 4)$$
$$6y - 6 = -5x + 20$$
$$5x + 6y - 26 = 0$$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ต้องการ คือ $5x + 6y - 26 = 0$

ใบงานที่ 1.5

1. จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงตามข้อที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1) ขนานกับแกน X และอยู่เหนือแกน X เป็นระยะ 5 หน่วย

………

………

(2) ขนานกับแกน Y และอยู่ทางซ้ายแกน Y เป็นระยะ 3 หน่วย

………

………

(3) ขนานกับแกน X และอยู่ห่างจากจุด (0, -1) เป็นระยะ 4 หน่วย

………

………

(4) ขนานกับแกน Y และอยู่ห่างจากจุด (2, 0) เป็นระยะ 5 หน่วย

………

………

2. จงหาความชันและจุดที่เส้นตรงต่อไปนี้ตัดแกน X และ แกน Y

(1) $x + 2y + 3 = 0$

………

………

จะได้ ความชัน =…………………..ตัดแกน X ที่จุด………………………และตัดแกน Y ที่จุด……………………………..

(2) $4x - 3y - 9 = 0$

………

………

………

จะได้ ความชัน =…………………..ตัดแกน X ที่จุด………………………และตัดแกน Y ที่จุด……………………………..

(3) $5y - x = 10$

………

………

………

จะได้ ความชัน =…………………..ตัดแกน X ที่จุด………………………และตัดแกน Y ที่จุด……………………………..

(4) $x = -\frac{4}{5}$

………

………

………

จะได้ ความชัน =…………………..ตัดแกน X ที่จุด………………………และตัดแกน Y ที่จุด……………………………..

(5) $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$

………

………

………

จะได้ ความชัน =…………………..ตัดแกน X ที่จุด………………………และตัดแกน Y ที่จุด……………………………..

3. จงแสดงว่าเส้นตรง $2x - 4y + 5 = 0$ ขนานกับเส้นตรง $6x - 8y - 5 = 0$

....

....

....

....

....

4. จงแสดงว่าเส้นตรง $5x + 2y - 3 = 0$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $4x - 10y + 5 = 0$

....

....

....

....

....

5. ถ้าเส้นตรง $ax + 10y = 6$ ขนานกับเส้นตรง $x + 2y = 8$ จงหาค่า a

....

....

....

....

....

6. ถ้าเส้นตรง $3x + by = 5$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $5x + 3y - 10 = 0$ จงหาค่า b

....

....

....

....

....

7. จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่ลากผ่านจุด (1, 2) และ (4, 3)

....

....

....

....

....

....

....

8. จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่ลากผ่านจุด (-3, 4) และ (5, -6)

....

....

....

....

....

....

....

9. จงแสดงว่าเส้นตรง $3x - 2y - 4 = 0$ กับเส้นตรง $6x - 4y = 8$ เป็นเส้นตรงเดียวกัน

10. จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่ลากผ่านจุด (2, -1) และ มีความชันเท่ากับ $\frac{3}{4}$

11. จงหาสมการเส้นตรงที่ลากผ่านจุด (-1, -2) และขนานกับเส้นตรง $2x - 3y + 4 = 0$

12. จงหาสมการเส้นตรงที่ลากผ่านจุด (-1, -2) และขนานกับเส้นตรง $2x - 3y + 4 = 0$

13. จงหาสมการเส้นตรงที่ลากผ่านจุด (1, 4) และตั้งฉากกับเส้นตรง $5x + 3y - 4 = 0$

14. จงหาสมการเส้นตรงที่ลากผ่านจุด (-4, -5) และตั้งฉากกับเส้นตรงที่ลากผ่านจุด (1, 2) และ (6, 5)

15. จงหาสมการเส้นตรงที่ลากผ่านจุดตัดของเส้นตรง $x + y = 5$ กับ $x - y = 1$ และขนานกับเส้นตรง $4x - 5y + 6 = 0$

16. จงหาสมการเส้นตรงที่ลากผ่านจุดตัดของเส้นตรง $x + 2y = 3$ กับ $3y - x = 2$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $5x - 2y + 6 = 0$

17. กำหนด A(-1, 9), B(-2, 2) และ C(5, 6) เป็นจุดยอดมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC จงหาสมการเส้นตรงซึ่งเป็นส่วนสูงของสามเหลี่ยมรูปนี้ที่ลากจากจุด A

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6

เรื่อง **เรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 4 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. หาระยะระหว่างเส้นตรงกับจุดได้
2. หาระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนานได้
3. นำความรู้เรื่องการหาระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุดและระหว่างเส้นคู่ขนานไปใช้แก้โจทย์ปัญหาได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถ

1. บอกสูตรการหาระยะระหว่างเส้นตรงกับจุดได้
2. หาระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุดได้
3. บอกสูตรการหาระยะระหว่างเส้นคู่ขนานได้
4. หาระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนานได้

2. แนวความคิดหลัก (สาระสำคัญ)

การหาระยะระหว่างเส้นตรงกับจุด
การหาระยะระหว่างเส้นคู่ขนาน

3. เนื้อหาสาระ

ระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุด

ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $Ax + By + C = 0$ กับจุด (x_1, y_1)

จะได้ $$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ข้อสังเกต ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $Ax + By + C = 0$ กับจุด $(0, 0)$

จะได้ $$d = \frac{|A(0) + B(0) + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนาน

ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $Ax + By + C_1 = 0$ กับเส้นตรง $Ax + By + C_2 = 0$

จะได้ $$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

หมายเหตุ เส้นตรง $Ax + By + C_1 = 0$ กับ $Ax + By + C_2 = 0$ มีค่า $C_1 \neq C_2$
ถ้าหาก $C_1 = C_2$ แล้ว เส้นตรงทั้งสองนี้เป็นเส้นตรงเดียวกัน

4. กิจกรรมการเรียนการสอน

1. ให้นักเรียนทบทวนความรู้เกี่ยวกับระบบพิกัดฉากและการลงจุด
2. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาระยะระหว่างจุดสองจุด
3. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับ เส้นขนาน เส้นตั้งฉาก
4. แบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มๆ ละ 4 - 5 คน แล้วให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้ที่ 1.6 แล้วสรุปสูตรการหาระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุด และระยะระหว่างเส้นคู่ขนาน
5. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้ เกี่ยวกับการหาระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุด
6. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้ เกี่ยวกับการหาระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนาน
7. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้ เกี่ยวกับการหาระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุด และระยะระหว่างเส้นคู่ขนานไปใช้แก้โจทย์ปัญหาได้
8. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 1.6

5. สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 1.6
2. ใบงานที่ 1.6
3. หนังสือ
4. แผ่นใส

6. การวัดผลประเมินผล ดังนี้

สิ่งที่วัดผล	วิธีวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
1. ด้านความรู้	1. ตรวจใบงาน 2. ทดสอบ	1. ใบงานที่ 1.6 2. แบบทดสอบ	1. ทำถูกอย่างน้อย 95 % 2. ทำถูกอย่างน้อย 95 %
2. ด้านทักษะ	สังเกตจากการบอกหรือการสรุป	แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 90 %
3. ด้านคุณลักษณะ	สังเกต	แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 90 %

7. บันทึกหลังสอน

……..
……..
……..
……..

8. กิจกรรมเสนอแนะ

……
……
……..
……..

ใบความรู้ที่ 1.6 (ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์)

ระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุด และระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนาน

ระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุด

ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $Ax + By + C = 0$ กับจุด(x_1, y_1)

จะได้ $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

ข้อสังเกต ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $Ax + By + C = 0$ กับจุด$(0, 0)$

$$\text{จะได้ } d = \frac{|A(0) + B(0) + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนาน

ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $Ax + By + C_1 = 0$ กับ เส้นตรง $Ax + By + C_2 = 0$

จะได้ $d = \dfrac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

หมายเหตุ ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $Ax + By + C_1 = 0$ กับ เส้นตรง $Ax + By + C_2 = 0$ จะได้ว่าเส้นตรงทั้งสองมีค่า C_1 และ C_2 ต่างกัน$(C_1 \neq C_2)$ ถ้า $C_1 = C_2$ แล้ว เส้นตรงทั้งสองนี้เป็นเส้นตรงเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 1 จงหาระยะห่างระหว่างเส้นตรง $3x - 4y + 2 = 0$ กับจุด$(2, -3)$

วิธีทำ จากเส้นตรง $3x - 4y + 2 = 0$ และ จุด$(2, -3)$

จะได้ $A = 3$, $B = -4$, $C = 2$, $x_1 = 2$ และ $y_1 = -3$

จาก $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$$\text{จะได้ } d = \frac{|(3)(2) + (-4)(-3) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|6 + 12 + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|20|}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$$

ดังนั้น ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $3x - 4y + 2 = 0$ กับจุด$(2, -3)$ เท่ากับ 4 หน่วย

ตัวอย่างที่ 2 จงหาระยะห่างระหว่างเส้นตรง $3x + 4y = 5$ กับจุด$(0, 0)$

วิธีทำ จากเส้นตรง $3x + 4y = 5$ หรือ เส้นตรง$3x + 4y - 5 = 0$ กับ จุด$(0, 0)$

จะได้ $A = 3$, $B = 4$, $C = -5$, $x_1 = 0$ และ $y_1 = 0$

จาก $d = \dfrac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$$\text{จะได้ } d = \frac{|-5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$$

ดังนั้น ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $3x + 4y = 5$ กับจุด$(0, 0)$ เท่ากับ 1 หน่วย

ตัวอย่างที่ 3 จงหาระยะห่างระหว่างเส้นตรง $6x + 8y - 5 = 0$ กับเส้นตรง $3x + 4y + 10 = 0$

วิธีทำ จากเส้นตรง $6x + 8y - 5 = 0$ กับเส้นตรง $3x + 4y + 10 = 0$ หรือเส้นตรง $6x + 8y + 20 = 0$

จะได้ $A = 6,\ B = 8,\ C_1 = -5,$ และ $C_2 = 20$

จาก $$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

จะได้ $$d = \frac{|-5-20|}{\sqrt{6^2+8^2}}$$
$$= \frac{|-25|}{\sqrt{100}}$$
$$= \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

ดังนั้น ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $6x + 8y - 5 = 0$ กับเส้นตรง $3x + 4y + 7 = 0$ เท่ากับ $\frac{5}{2}$ หน่วย

ตัวอย่างที่ 4 จงหาสมการเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $3x - 4y + 9 = 0$ และอยู่ห่างจากจุด $(2, -1)$ เท่ากับ 3 หน่วย

วิธีทำ ให้เส้นตรงที่ต้องการคือ $3x - 4y + C = 0$ เมื่อ C เป็นจำนวนจริงใดๆ

เนื่องจากเส้นตรง $3x - 4y + C = 0$ อยู่ห่างจากจุด $(2, -1)$ เท่ากับ 3 หน่วย

จะได้ $A = 3,\ B = -4,\ x_1 = 2,$ และ $y_1 = -1$

จาก $$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

จะได้ $$3 = \frac{|(3)(2)+(-4)(-1)+C|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$$
$$3 = \frac{|10+C|}{5}$$
$$|10 + C| = 15$$
$$10 + C = \pm 15$$
$$\therefore C = 5, -25$$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ต้องการคือ $3x - 4y + 5 = 0$ หรือ $3x - 4y - 25 = 0$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $4x + 3y - 5 = 0$ และอยู่ห่างจากจุด $(-2, 1)$ เท่ากับ 1 หน่วย

วิธีทำ ให้เส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $4x + 3y - 5 = 0$ คือเส้นตรง $3x - 4y + C = 0$

เนื่องจากเส้นตรง $3x - 4y + C = 0$ อยู่ห่างจากจุด $(-2, 1)$ เท่ากับ 1 หน่วย

จะได้ $A = 3,\ B = -4,\ x_1 = -2,$ และ $y_1 = 1$

จาก $$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

จะได้ $$1 = \frac{|(3)(-2)+(-4)(1)+C|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$$
$$1 = \frac{|-10+C|}{5}$$
$$|-10 + C| = 5$$
$$-10 + C = \pm 5$$
$$\therefore C = 15, 5$$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ต้องการคือ $3x - 4y + 15 = 0$ หรือ $3x - 4y + 5 = 0$

ใบงานที่ 1.6

1. จงหาระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1) $3x + 4y + 5 = 0$ กับจุด $(3, 4)$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

(2) $4x - 3y - 8 = 0$ กับจุด $(1, 2)$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

(3) $6x + 8y + 7 = 0$ กับจุด $(1, -1)$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2. จงหาระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนานต่อไปนี้

(1) $3x + 4y - 5 = 0$ กับ $3x + 4y - 10 = 0$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

(2) $4x - 3y - 10 = 0$ กับ $8x - 6y + 9 = 0$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

(3) $12x + 5y = 17$ กับ $y = -\frac{12}{5}x - \frac{9}{5}$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3. จงหาสมการของเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $5x + 12y - 2 = 0$ และอยู่ห่างจากเส้นตรงนี้ 3 หน่วย

4. จงหาสมการของเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $6x - 8y + 2 = 0$ และอยู่ห่างจากจุด $(-2, 5)$ เท่ากับ 5

5. จงหาสมการของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $5x - 12y + 4 = 0$ และอยู่ห่างจากจุด $(3, 3)$ เป็นระยะ 1 หน่วย

6. ถ้าเส้นตรง $6x + 8y - 2 = 0$ เป็นเส้นตรงที่อยู่กึ่งกลางระหว่างเส้นคู่ขนานคู่หนึ่งซึ่งอยู่ห่างกัน 10 หน่วย จงหาเส้นตรงคู่นี้

7. จงหาสมการเส้นตรงที่อยู่ห่างจากเส้นตรงที่ตัดแกน X ที่จุด $(3, 0)$ และตัดแกน Y ที่จุด $(0, 5)$ เป็นระยะ 3 หน่วย

sm.tm

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7

เรื่อง **การเลื่อนแกนทางขนาน** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. บอกพิกัดของจุดเมื่อเทียบกับแกนใหม่ได้
2. เขียนกราฟของสมการต่างๆ โดยอาศัยการเลื่อนแกนทางขนานได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกตำแหน่งของจุดในระบบแกนมุมฉากเมื่อกำหนดพิกัดของจุดให้ได้
2. บอกพิกัดของจุดในระนาบเมื่อกำหนดตำแหน่งของจุดให้ได้
3. บอกพิกัดของจุดเมื่อเทียบกับแกนใหม่ได้
4. เขียนกราฟของสมการต่างๆ โดยอาศัยการเลื่อนแกนทางขนานได้

2. แนวความคิดหลัก (สาระสำคัญ)

การเลื่อนแกนทางขนาน (Translation of Axes)

การเลื่อนแกนทางขนาน หมายถึงการเปลี่ยนแปลงแกนพิกัดเดิมอย่างน้อยหนึ่งแกน (แกน X หรือแกน Y) โดยให้แกนพิกัดใหม่ขนานกับแกนพิกัดเดิม

3. เนื้อหาสาระ

1. ให้ (x, y) เป็นพิกัดของจุด P เมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม (x', y') เป็นพิกัดของจุด P เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ และ h, k เป็นจำนวนจริง

ดังนั้น จะได้ $\boxed{\begin{array}{l} x = x' + h \\ y = y' + k \end{array}}$ หรือ $\boxed{\begin{array}{l} x' = x - h \\ y' = y - k \end{array}}$

2. การเลื่อนแกนทางขนานกับการเขียนกราฟ

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ให้นักเรียนทบทวนความรู้เกี่ยวกับระบบแกนมุมฉากและการเขียนกราฟต่างๆ
2. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้ที่ 1.7 เกี่ยวกับการเลื่อนแกนทางขนานแล้วให้นักเรียนปฏิบัติการเลื่อนแกน ทางขนานโดยใช้แผ่นใส
3. ให้นักเรียนกำหนดพิกัดของจุดต่างๆ แล้วช่วยกันหาและบอกตำแหน่งของจุดเหล่านั้น
4. ให้นักเรียนกำหนดพิกัดของจุดต่างๆ ซึ่งเทียบกับแกนพิกัดเดิมแล้วบอกพิกัดของจุดเหล่านั้นเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่
5. ให้นักเรียนกำหนดพิกัดของจุดต่างๆ ซึ่งเทียบกับแกนพิกัดใหม่แล้วบอกพิกัดของจุดเหล่านั้นเมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม
6. ให้นักเรียนกำหนดสมการต่างๆ และจัดสมการเหล่านั้นให้อยู่ในรูป $x' = x - h$ และ $y' = y - k$ โดยมีจุด (h, k) เป็นจุดกำเนิดใหม่ และเขียนกราฟของสมการเหล่านั้น โดยใช้แกนใหม่เป็นแกนอ้างอิง
7. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 1.7

5. แหล่งการการเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 1.7
2. ใบงานที่ 1.7
3. หนังสือ
4. แผ่นใส

6. กระบวนการวัดผลประเมินผล

สิ่งที่วัดผล	วิธีวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
1. ด้านความรู้	1. ตรวจใบงาน 2. ทดสอบ	1. ใบงานที่ 1.7 2. แบบทดสอบ	1. ทำถูกอย่างน้อย 95 % 2. ทำถูกอย่างน้อย 95 %
2. ด้านทักษะ	สังเกตจากการบอกหรือการสรุป	แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 90 %
3. ด้านคุณลักษณะ	สังเกต	แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 90 %

7. บันทึกหลังสอน

………..
………..
………..
………..
………..

8. กิจกรรมเสนอแนะ

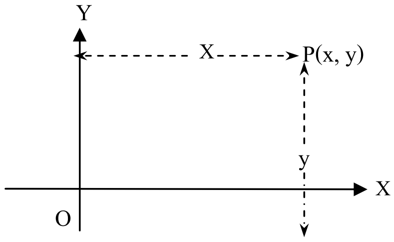
………..
………..
………..
……….
………..
………..

การเลื่อนแกนทางขนาน (Translation of Axes)

การเลื่อนแกนทางขนาน หมายถึงการเปลี่ยนแปลงแกนพิกัดเดิมอย่างน้อยหนึ่งแกน (แกน X หรือแกน Y) โดยให้แกนพิกัดใหม่ขนานกับแกนพิกัดเดิม

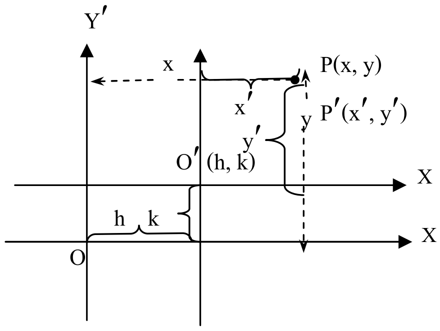
การเลื่อนแกนทางขนานนับเป็นพื้นฐานที่สำคัญที่จะช่วยในการศึกษาเกี่ยวกับภาคตัดกรวยได้สะดวกยิ่งขึ้น

ในระบบแกนพิกัดฉาก เราใช้แกน X และ Y สำหรับอ้างอิงพิกัดหรือตำแหน่งของจุดในระนาบ



จุด P(x, y) เป็นจุดที่อยู่ห่างจากแกน Y ไปทางขวามือเป็นระยะ x หน่วย และอยู่ห่างจากแกน X ซึ่งอยู่เหนือแกน X เป็นระยะ y หน่วย

เมื่อเลื่อนแกน จุด P(x, y) ยังคงที่ แต่พิกัดของจุด P จะเปลี่ยนไปเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ ดังรูป



จากรูป

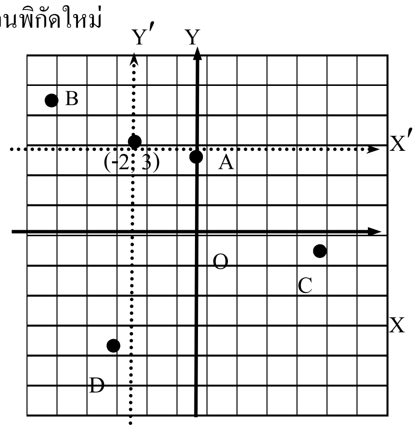
แกนพิกัดใหม่ X′ และ Y′ ขนานกับแกนพิกัดเดิม X และ Y ตามลำดับ พิกัดของจุดกำเนิดใหม่เมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม คือจุด O′(h, k) นั่นคือแกนพิกัดใหม่เกิดจากการเลื่อนแกนตามแนวนอน h หน่วย และตามแนวตั้ง k หน่วย

ให้ (x, y) เป็นพิกัดของจุด P เมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม

(x′, y′) เป็นพิกัดของจุด P เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ และ h, k เป็นจำนวนจริง

ดังนั้น จะได้ $\boxed{\begin{array}{l} x = x' + h \\ y = y' + k \end{array}}$ หรือ $\boxed{\begin{array}{l} x' = x - h \\ y' = y - k \end{array}}$

ตัวอย่างที่ 1 ถ้าเลื่อนแกนไปโดยใช้จุด (-2, 3) เป็นจุดกำเนิดใหม่ ซึ่ง A(0, 2), B(-5, 4), C(4, -1) และ D(-3, -5) เป็นพิกัดของจุดเมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม จงหาพิกัดของจุดเหล่านี้เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่



วิธีทำ ให้ (x, y) เป็นพิกัดของจุดเมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม

และ (x′, y′) เป็นพิกัดของจุดเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่

ในที่นี้ (h, k) = (-2, 3) นั่นคือ h = -2 และ k = 3

จาก $x' = x - h$ และ $y' = y - k$

จะได้ $x' = x + 2$ และ $y' = y - 3$

(1) A(0, 2) ซึ่ง $x = 0$, $y = 2$

จะได้ $x' = 0 + 2 = 2$ และ $y' = 2 - 3 = -1$

ดังนั้น พิกัดของจุด A(0, 2) เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ คือ จุด (2, -1)

(2) B(-5, 4) ซึ่ง $x = -5$, $y = 4$

จะได้ $x' = -5 + 2 = -3$ และ $y' = 4 - 3 = 1$

ดังนั้น พิกัดของจุด B(-5, 4) เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ คือ จุด (-3, 1)

(3) C(4, -1) ซึ่ง $x = 4$ และ $y = -1$

จะได้ $x' = 4 + 2 = 6$ และ $y' = -1 - 3 = -4$

ดังนั้น พิกัดของจุด C(4, -1) เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ คือ จุด (6, -4)

(4) D(-3, -5) ซึ่ง $x = -3$ และ $y = -5$

จะได้ $x' = -3 + 2 = -1$ และ $y' = -5 - 3 = -8$

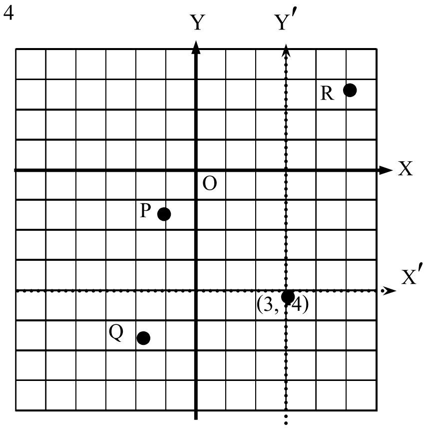
ดังนั้น พิกัดของจุด D(-3, -5) เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ คือ จุด (-1, -8)

ตัวอย่างที่ 2 ถ้าเลื่อนแกนไปโดยใช้จุด (3, -4) เป็นจุดกำเนิดใหม่ ซึ่ง P(-4, 3), Q(-5, -2) และ R(2, 7) เป็นพิกัดของจุดเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ จงหาพิกัดของจุดเหล่านี้เมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม

วิธีทำ ให้ (x, y) เป็นพิกัดของจุดเมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม และ(x', y') เป็นพิกัดของจุดเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่

ในที่นี้ $(h, k) = (3, -4)$ นั่นคือ $h = 3$ และ $k = -4$

จาก $x = x' + h$ และ $y = y' + k$ จะได้ $x = x' + 3$ และ $y = y' - 4$



(1) P(-4, 3) ซึ่ง $x' = -4$ และ $y' = 3$

จะได้ $x = -4 + 3 = -1$ และ $y = 3 - 4 = -1$

ดังนั้น พิกัดของจุด P(-4, 3) เมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม คือ จุด (-1, -1)

(2) Q(-5, -2) ซึ่ง $x' = -5$ และ $y' = -2$

จะได้ $x = -5 + 3 = -2$ และ $y = -2 - 4 = -6$

ดังนั้น พิกัดของจุด Q(-5, -2) เมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม คือ จุด (-2, -6)

(3) R(2, 7) ซึ่ง $x' = 2$ และ $y' = 7$

จะได้ $x = 2 + 3 = 5$ และ $y = 7 - 4 = 3$

ดังนั้น พิกัดของจุด R(2, 7) เมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม คือ จุด (5, 3)

ข้อตกลง "การเลื่อนแกนทางขนานโดยมีจุด (h, k) เป็นจุดกำเนิดใหม่" เรียกสั้นๆ ว่า "**การเลื่อนแกนไปที่จุด (h, k)**"

ตัวอย่างที่ 3 ถ้าเลื่อนแกนไปที่จุด (-3, 4) กราฟของสมการ $y = |x + 3| + 4$ จะมีสมการเทียบกับแกนใหม่ซึ่งใช้พิกัด (x', y') แทนพิกัด (x, y) เป็นอย่างไร

วิธีทำ จากโจทย์ เลื่อนแกนไปที่จุด (-3, 4) จะได้ $(h, k) = (-3, 4)$ นั่นคือ $h = -3,\ k = 4$

เนื่องจาก $x = x' + h$ และ $y = y' + k$ จะได้ $x = x' - 3$ และ $y = y' + 4$

จากสมการ $y = |x + 3| + 4$ แทนค่า x ด้วย $x' - 3$ และแทนค่า y ด้วย $y' + 4$

จะได้ $y' + 4 = |x' - 3 + 3| + 4$

$y' + 4 - 4 = |x' - 3 + 3|$

จะได้ $y' = |x'|$ จะเป็นสมการเทียบกับแกนใหม่ของกราฟรูปนี้

ตัวอย่างที่ 4 ถ้าเลื่อนแกนไปที่จุด (3, -7) กราฟของสมการ $x^2 - 6x + y^2 + 14y - 2 = 0$ จะมีสมการเทียบกับแกนใหม่ซึ่งใช้พิกัด (x', y') แทนพิกัด (x, y) เป็นอย่างไร

วิธีทำ จากโจทย์ เลื่อนแกนไปที่จุด (3, -7) จะได้ $(h, k) = (3, -7)$ นั่นคือ $h = 3,\ k = -7$

เนื่องจาก $x = x' + h$ และ $y = y' + k$ จะได้ $x = x' + 3$ และ $y = y' - 7$

จากสมการ $x^2 - 6x + y^2 + 14y - 2 = 0$ แทนค่า x ด้วย $x' + 3$ และแทนค่า y ด้วย $y' - 7$

จะได้ $(x' + 3)^2 - 6(x' + 3) + (y' - 7)^2 + 14(y' - 7) - 2 = 0$

$(x')^2 + 6x' + 9 - 6x' - 18 + (y')^2 - 14y' + 49 + 14y' - 98 - 2 = 0$

$(x')^2 + (y')^2 = 60$

จะได้ $(x')^2 + (y')^2 = 60$ จะเป็นสมการเทียบกับแกนใหม่ของกราฟรูปนี้

ตัวอย่างที่ 5 จากสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้ ถ้าต้องการเลื่อนแกนอ้างอิงให้ได้สมการในรูปที่กำหนดให้แล้ว จะเลือกจุดใดเป็นจุดกำเนิด

(1) $2x - 3y + 12 = 0$ ต้องการให้อยู่ในรูป $2x' = 3y'$

วิธีทำ จากสมการ $2x - 3y + 12 = 0$

จะได้ $2x = 3y - 12$

$2x = 3(y - 4)$ ....(1)

ให้ $x' = x$ และ $y' = y - 4$

แทน x ด้วย x' และ แทน $y - 4$ ด้วย y' ลงในสมการ (1)

จะได้ สมการ $2x' = 3y'$ อยู่ในรูปที่ต้องการ และจุดกำเนิดใหม่คือจุด (0, 4)

หรือ จากสมการ $2x - 3y + 12 = 0$ จะได้ $2x + 6 = 3y - 6$

$2(x + 3) = 3(y - 2)$ ....(2)

ให้ $x' = x + 3$ และ $y' = y - 2$

แทน $x + 3$ ด้วย x' และ แทน $y - 2$ ด้วย y' ลงในสมการ (2)

จะได้ สมการ $2x' = 3y'$ อยู่ในรูปที่ต้องการ และจุดกำเนิดใหม่คือจุด (-3, 2)

ข้อสังเกต จะเห็นว่า $2x - 3y + 12 = 0$ เป็นสมการเส้นตรง จะเลือกจุดกำเนิดใหม่ใดๆ ก็ได้ที่เป็นจุดอยู่บนเส้นตรงนี้

(2) $y(x - 5) = 3$ ต้องการให้อยู่ในรูป $y'x' = 3$

วิธีทำ จากสมการ $y(x - 5) = 3$ ....(1)

ให้ $x' = x - 5$ และ $y' = y$

แทน $x - 5$ ด้วย x' และ แทน y ด้วย y' ลงในสมการ (1)

จะได้ สมการ $y'x' = 3$ อยู่ในรูปที่ต้องการ และจุดกำเนิดใหม่คือจุด (5, 0)

(3) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 24 = 0$ ต้องการให้อยู่ในรูป $(x')^2 + (y')^2 = 1$

วิธีทำ จากสมการ $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 24 = 0$

จะได้ $(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 6y + 9) = -24 + 16 + 9$

$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 1$ ....(1)

ให้ $x' = x - 4$ และ $y' = y + 3$

แทน $x - 4$ ด้วย x' และ แทน $y + 3$ ด้วย y' ลงในสมการ (1)

จะได้ สมการ $(x')^2 + (y')^2 = 1$ อยู่ในรูปที่ต้องการ และจุดกำเนิดใหม่คือจุด (4, -3)

(4) $25x^2 - 9y^2 + 50x + 36y = 236$ ต้องการให้อยู่ในรูป $\frac{(x')^2}{9} - \frac{(y')^2}{25} = 1$

วิธีทำ จากสมการ $25x^2 - 9y^2 + 50x + 36y = 236$

จะได้ $(25x^2 + 50x) - (9y^2 - 36y) = 236$

$25(x^2 + 2x) - 9(y^2 - 4y) = 236$

$25(x^2 + 2x + 1) - 9(y^2 - 4y + 4) = 236 + 25 - 36$

$25(x + 1)^2 - 9(y - 2)^2 = 225$

$\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{25} = 1$ ....(1)

ให้ $x' = x + 1$ และ $y' = y - 2$

แทน $x + 1$ ด้วย x' และ แทน $y - 2$ ด้วย y' ลงในสมการ (1)

จะได้ สมการ $\frac{(x')^2}{9} - \frac{(y')^2}{25} = 1$ อยู่ในรูปที่ต้องการ และจุดกำเนิดใหม่คือจุด (-1, 2)

sm.tm

การเลื่อนแกนทางขนานกับการเขียนกราฟ

การเขียนกราฟโดยการเลื่อนแกนทางขนานไปที่จุด (h, k) ที่เหมาะสม จะเขียนง่ายกว่าการเขียนกราฟในระบบพิกัดฉากที่มีจุดกำเนิดที่จุด (0, 0) โดยเปลี่ยนพิกัดจุด P(x, y) ใดๆ ในระบบเดิม เป็น $P(x', y')$ ในระบบใหม่ โดยที่ $x' = x - h$ และ $y' = y - k$ จะทำให้สมการเทียบกับแกนใหม่มีรูปซึ่งสะดวกต่อการเขียนกราฟ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 6 จงเขียนกราฟของสมการต่อไปนี้

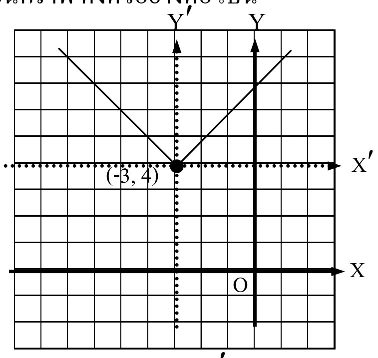
(1) $y = |x+3| + 4$

วิธีทำ จากสมการ $y = |x+3| + 4$

จัดได้เป็น $y - 4 = |x+3|$

และเลื่อนแกนไปที่จุด (-3, 4)

จะได้ สมการเทียบกับแกนใหม่ คือ $y' = |x'|$

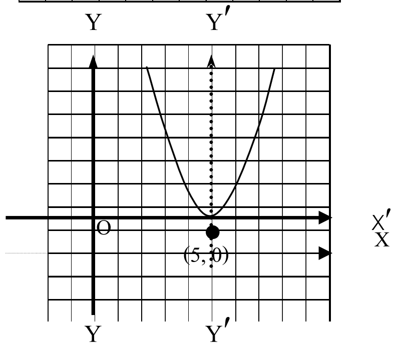


(2) $y = (x-5)^2$

วิธีทำ จากสมการ $y = (x-5)^2$

เลื่อนแกนไปที่จุด (5, 0)

จะได้ สมการเทียบกับแกนใหม่ คือ $y' = (x')^2$



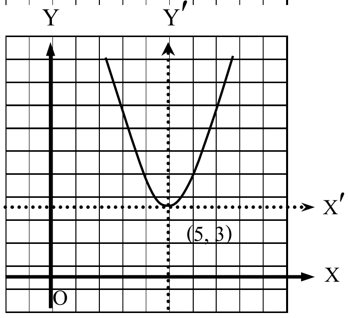
(3) $y = (x-5)^2 + 3$

วิธีทำ จากสมการ $y = (x-5)^2 + 3$

จัดได้เป็น $y - 3 = (x-5)^2$

และเลื่อนแกนไปที่จุด (5, 3)

จะได้ สมการเทียบกับแกนใหม่ คือ $y' = (x')^2$



(4) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$

วิธีทำ จากสมการ $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$

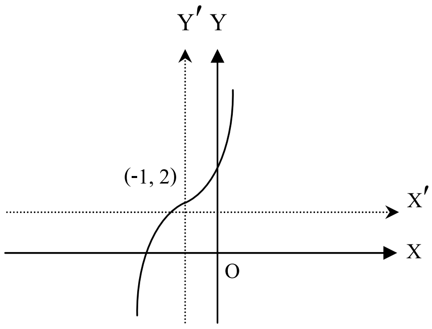
จัดได้เป็น $y = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + 2$

$y - 2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

$y - 2 = (x+1)^3$

และเลื่อนแกนไปที่จุด (-1, 2)

จะได้ สมการเทียบกับแกนใหม่ คือ $y' = (x')^3$



(5) $y = x^3 + 3x^2 + 3x$

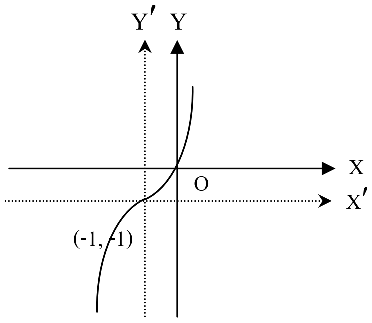
วิธีทำ จากสมการ $y = x^3 + 3x^2 + 3x$

จัดได้เป็น $y + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

$y + 1 = (x+1)^3$

และเลื่อนแกนไปที่จุด (-1, -1)

จะได้ สมการเทียบกับแกนใหม่ คือ $y' = (x')^3$



sm.tm

ใบงานที่ 1.7

1. ถ้าเลื่อนแกนไปโดยใช้จุด (5, -4) เป็นจุดกำเนิดใหม่ ซึ่ง A(5, -10) , B(-7, 3), C(0, 0), D(-3, -2) และ E(9, 0) เป็นพิกัดของจุดเมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม จงหาพิกัดของจุดเหล่านี้เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่

วิธีทำ ให้ (x, y) เป็นพิกัดของจุดเมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม และ(x', y') เป็นพิกัดของจุดเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่

ในที่นี้ (h, k) = ... นั่นคือ h = ... และ k = ...

จาก $x' = x - h$ และ $y' = y - k$ จะได้ x' = ... และ y' = ...

(1) A(5, -10) ซึ่ง x = 5 และ y = -10

....

....

(2) B(-7, 3) ซึ่ง x = ………. และ y = …………

....

....

(3) C(0, 0) ซึ่ง x = ………. และ y = …………

....

....

(4) D(-3, -2) ซึ่ง x = ………. และ y = …………

....

....

(5) E(9, 0) ซึ่ง x = ………. และ y = …………

....

....

2. ถ้าเลื่อนแกนไปโดยใช้จุด (4, 3) เป็นจุดกำเนิดใหม่ ซึ่ง P(-9, 3), Q(-7, -8), R(5, -1), S(10, 8) และ T(-4, -3) เป็นพิกัดของจุดเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ จงหาพิกัดของจุดเหล่านี้เมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม

วิธีทำ ให้ (x, y) เป็นพิกัดของจุดเมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม และ(x', y') เป็นพิกัดของจุดเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่

ในที่นี้ (h, k) = ... นั่นคือ h = ... และ k = ...

จาก $x = x' + h$ และ $y = y' + k$ จะได้ x = ... และ y = ...

(1) P(-9, 3) ซึ่ง $x' = -9$ และ $y' = 3$

....

....

(2) Q(-7, -8) ซึ่ง x' =………. และ y' = ………..

....

....

(3) R(5, -1) ซึ่ง x' =………. และ y' = ………..

....

....

(4) S(10, 8) ซึ่ง x' =………. และ y' = ………..

....

....

(5) T(-4, -3) ซึ่ง x' =………. และ y' = ………..

....

....sm.tm

3. ถ้าเลื่อนแกนไปที่จุด (2, 7) กราฟของสมการ $y = |x - 2| + 7$ จะมีสมการเทียบกับแกนใหม่ซึ่งใช้พิกัด (x', y') แทนพิกัด (x, y) เป็นอย่างไร

....

....

....

....

....

....

....

....

4. ถ้าเลื่อนแกนไปที่จุด (-4, 0) กราฟของสมการ $x^2 + 8x - y + 16 = 0$ จะมีสมการเทียบกับแกนใหม่ซึ่งใช้พิกัด (x', y') แทนพิกัด (x, y) เป็นอย่างไร

....

....

....

....

....

....

....

....

5. ถ้าเลื่อนแกนไปที่จุด (-3, 2) กราฟของสมการ $x^2 + 6x + 4y^2 - 16y + 21 = 0$ จะมีสมการเทียบกับแกนใหม่ซึ่งใช้พิกัด (x', y') แทนพิกัด (x, y) เป็นอย่างไร

....

....

....

....

....

....

6. ถ้าเลื่อนแกนไปที่จุด (5, -4) กราฟของสมการ $2x^2 - 20x - 3y^2 - 24y - 16 = 0$ จะมีสมการเทียบกับแกนใหม่ซึ่งใช้พิกัด (x', y') แทนพิกัด (x, y) เป็นอย่างไร

....

....

....

....

....

....

....

....

....sm.tm

7. จากสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้ ถ้าต้องการเลื่อนแกนอ้างอิงให้ได้สมการในรูปที่กำหนดให้แล้วจะเลือกจุดใดเป็นจุดกำเนิด

(1) $5x - 3y - 7 = 0$ ต้องการให้อยู่ในรูป $5x' = 3y'$

(2) $y^2 - 4y + 2x - 6 = 0$ ต้องการให้อยู่ในรูป $(y')^2 + 2x' = 0$

(3) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$ ต้องการให้อยู่ในรูป $(x')^2 + (y')^2 = 16$

(4) $4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y = 23$ ต้องการให้อยู่ในรูป $\frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{4} = 1$

8. จงเขียนกราฟของสมการต่อไปนี้

(1) $|y - 4| = |x + 5|$

(2) $|x - 3| + |y + 1| = 2$

(3) $x(y + 3) = 5$

(4) $(x - 4)(y - 7) = -6$

sm.tm

9. จงเขียนกราฟของสมการต่อไปนี้

(1) $y = x^2 + 6x + 12$

(2) $x = y^2 - 8y - 20$

(3) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$

(4) $x = y^3 + 3y^2 + 3y + 3$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8

เรื่อง **ภาคตัดกรวย (วงกลม)** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 7 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. บอกความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลมเมื่อกำหนดส่วนต่างๆ ของวงกลมให้ได้
2. เขียนกราฟและหาส่วนต่างๆ ของวงกลมเมื่อกำหนดความสัมพันธ์ของของกราฟวงกลมให้ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกรูปของรอยตัดของกรวยกลมตรงเมื่อนำระนาบมาตัดกรวยในลักษณะต่างๆ ได้
2. บอกบทนิยามของวงกลมได้
3. บอกความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0) พร้อมทั้งเขียนกราฟได้
4. บอกความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) พร้อมทั้งเขียนกราฟได้

2. แนวความคิดหลัก (สาระสำคัญ)

ภาคตัดกรวย (Conic Section) หมายถึง เส้นโค้ง ซึ่งได้แก่ วงกลม (circle) พาราโบลา(parabola) วงรี (ellipse) และไฮเพอร์โบลา(hyperbola) ที่เกิดจากการนำระนาบไปตัดกรวยกลมตรง

วงกลม คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบเป็นระยะเท่ากัน จุดคงที่นี้ เรียกว่า **จุดศูนย์กลาง** ของวงกลม และระยะทางที่เท่ากัน เรียกว่า **รัศมี** ของวงกลม

3. เนื้อหาสาระ

1. สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (0, 0) และรัศมี r หน่วย คือ $x^2 + y^2 = r^2$
2. สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k) และรัศมี r หน่วย คือ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
3. สมการรูปทั่วไปของวงกลม คือ $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

   จุดศูนย์กลางคือ $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ และรัศมีคือ $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ให้นักเรียนทบทวนความรู้เกี่ยวกับรูปต่างๆ ในวิชาเรขาคณิต การเขียนกราฟ และการเลื่อนแกนทางขนาน
2. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้ที่ 1.8 แล้วสรุปส่วนประกอบของกรวยตรง
3. ให้นักเรียนดูวีดีทัศน์เกี่ยวกับภาคตัดกรวยซึ่งระนาบจะตัดกรวยในลักษณะต่างๆ แล้วให้นักเรียนสรุปลักษณะการตัดกรวยด้วยระนาบที่ทำให้เกิดเป็นรูปวงกลม พาราโบลา วงรีและไฮเพอร์โบลา
4. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้ที่ 1.8 เกี่ยวกับวงกลมแล้วให้สรุปบทนิยามของวงกลม
5. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้แล้วหาความสัมพันธ์ของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (0, 0) และมีรัศมี r หน่วย พร้อมทั้งเขียนกราฟ
6. ให้นักเรียนกำหนดสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (0, 0) แล้วให้หารัศมีของวงกลมเหล่านั้น

7. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้แล้วหาความสัมพันธ์ของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k) และมีรัศมี r หน่วย พร้อมทั้งเขียนกราฟ

8. ให้นักเรียนกำหนดสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k) แล้วให้หารัศมีของวงกลมเหล่านั้น

9. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 1.8

5. แหล่งการการเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 1.8
2. ใบงานที่ 1.8
3. หนังสือ
4. แผ่นใส
5. วีดีทัศน์
6. กรวย

6. กระบวนการวัดผลประเมินผล

สิ่งที่วัดผล	วิธีวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
1. ด้านความรู้	1. ตรวจใบงาน 2. ทดสอบ	1. ใบงานที่ 1.8 2. แบบทดสอบ	1. ทำถูกอย่างน้อย 95 % 2. ทำถูกอย่างน้อย 95 %
2. ด้านทักษะ	สังเกตจากการบอกหรือการสรุป	แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 90 %
3. ด้านคุณลักษณะ	สังเกต	แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 90 %

7. บันทึกหลังสอน

………..
………..
………..
………..
………..

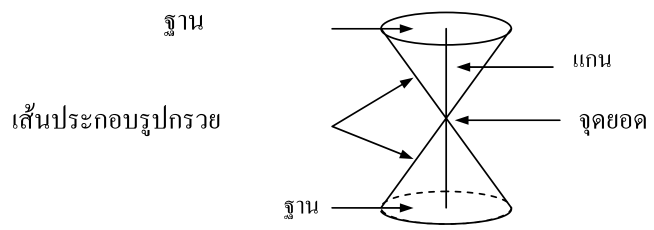
8. กิจกรรมเสนอแนะ

………..
………..
………..
………..
………..

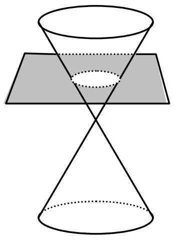
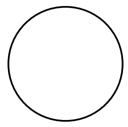
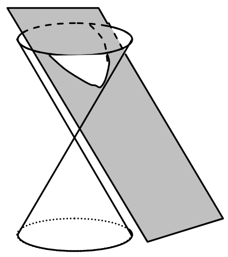
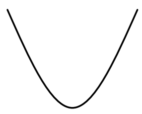
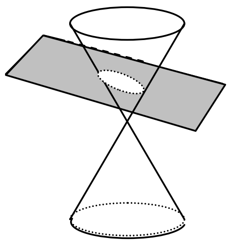
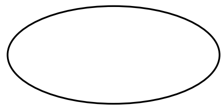
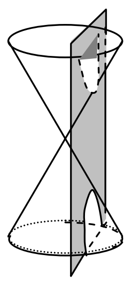
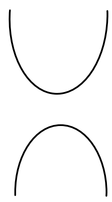
ใบความรู้ที่ 1.8 (ภาคตัดกรวย(วงกลม))

ภาคตัดกรวย (Conic Section) หมายถึง เส้นโค้ง ซึ่งได้แก่ วงกลม (circle) พาราโบลา(parabola) วงรี (ellipse) และไฮเพอร์โบลา(hyperbola) ที่เกิดจากการนำระนาบไปตัดกรวยกลมตรง

กรวยกลมตรงมาตรฐานมีลักษณะดังนี้



ภาคตัดกรวย ที่ได้จากนำระนาบไปตัดกรวยกลมตรงมาตรฐานโดยไม่ผ่านจุดยอดของกรวย จะได้ดังดังต่อไปนี้

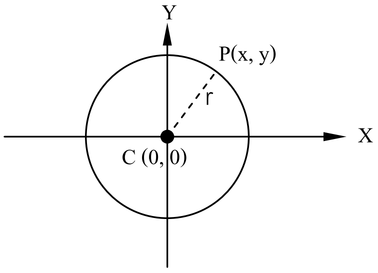
รูประนาบที่ตัดกรวย	**ลักษณะของระนาบที่ตัดกรวย**	เส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกรวย
1. 	ระนาบที่ตัดกรวยขนานกับฐานกรวย	 วงกลม
2. 	ระนาบที่ตัดกรวยขนานกับเส้นประกอบรูปกรวย	 พาราโบลา
3. 	ระนาบที่ตัดกรวยเพียงส่วนเดียวโดยระนาบนั้นไม่ขนานกับเส้นประกอบรูปกรวยและไม่ตั้งฉากกับแกนของกรวย	 วงรี
4. 	ระนาบที่ตัดกรวยขนานกับแกนของกรวยและตัดทั้งสองส่วนของกรวย	 ไฮเพอร์โบลา sm.tm

วงกลม (Circle)

บทนิยาม วงกลม คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบเป็นระยะเท่ากัน

จุดคงที่นี้ เรียกว่า **จุดศูนย์กลาง** ของวงกลม และระยะทางที่เท่ากัน เรียกว่า **ความยาวรัศมี** ของวงกลม

กรณีที่ 1 วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด C(0,0) และรัศมียาว r หน่วย จะได้สมการคือ $x^2 + y^2 = r^2$



จากรูป กำหนดให้ P(x, y) เป็นจุดใดๆ บนวงกลม

จากบทนิยาม จะได้ $CP = r$

เนื่องจาก $CP = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

ดังนั้น $\sqrt{x^2 + y^2} = r$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้ $x^2 + y^2 = r^2$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลม มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด(0, 0) และรัศมียาว r หน่วย คือ

$$\{ (x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = r^2 \}$$

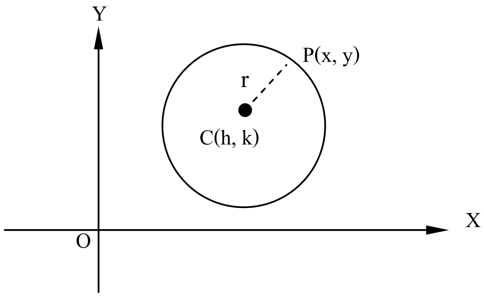
ตัวอย่างที่ 1 จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) และรัศมียาว 5 หน่วย

จะได้ความสัมพันธ์ คือ $\{ (x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 25 \}$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) และรัศมียาว $\sqrt{7}$ หน่วย

จะได้ความสัมพันธ์ คือ $\{ (x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 7 \}$

กรณีที่ 2 วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด C(h, k) และรัศมียาว r หน่วย จะได้สมการคือ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$



วิธีที่ 1 **จากรูป** กำหนดให้ P(x, y) เป็นจุดใดๆ บนวงกลม

จากบทนิยาม จะได้ $CP = r$

เนื่องจาก $CP = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$

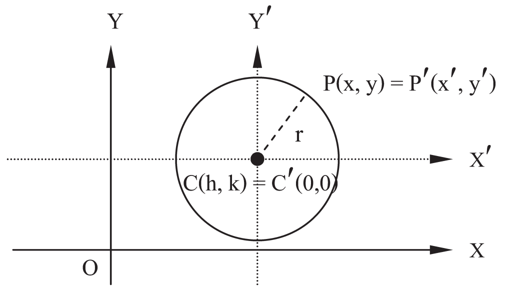
จะได้ $\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างจะได้

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

วิธีที่ 2 โดยเลื่อนแกนไปที่จุด C(h, k) จะได้พิกัดเมื่อเทียบกับแกนใหม่ของจุด C และจุด P ดังนี้

นั่นคือ จุด $C(h, k) = C'(0, 0)$ และจุด $P(x, y) = P'(x', y')$ ดังรูป



จากรูป จะได้สมการวงกลมเมื่อเทียบกับแกนใหม่ คือ $(x')^2 + (y')^2 = r^2$

แต่ $x' = x - h$ และ $y' = y - k$

จะได้สมการวงกลมเมื่อเทียบกับแกนเดิมคือ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลม มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k) และรัศมียาว r หน่วยคือ

$\{ (x, y) \in R \times R \mid (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \}$

จากสมการ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

จะได้ $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$ เนื่องจาก h, k และ r เป็นค่าคงตัว

กำหนดให้ $-2h = D$, $-2k = E$ และ $h^2 + k^2 - r^2 = F$ เมื่อ D, E และ F เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น จะได้สมการวงกลมมีรูปทั่วไป คือ $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (1, -3) และมีรัศมี 5 หน่วย

วิธีทำ สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์ที่ (h, k) รัศมี r หน่วย คือ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

จากโจทย์ จะได้ $(h, k) = (1, -3)$ และ $r = 5$

จะได้ สมการวงกลม $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 5^2$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 25$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่ต้องการคือ $\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0 \}$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ และ รัศมี $\frac{5}{4}$ หน่วย

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ $(h, k) = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ และ $r = \frac{5}{4}$

จะได้ สมการวงกลม $(x - \frac{3}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = (\frac{5}{4})^2$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 + y + \frac{1}{4} = \frac{25}{16}$$

$$x^2 + y^2 - 3x + y + \frac{15}{16} = 0$$

นำ 16 มาคูณตลอด จะได้ $16x^2 + 16y^2 - 48x + 16y + 15 = 0$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่ต้องการคือ $\{ (x, y) \mid 16x^2 + 16y^2 - 48x + 16y + 15 = 0 \}$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (2, 3) และ ผ่านจุด (4, -1)

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ $(h, k) = (2, 3)$ และ รัศมีของวงกลม เท่ากับระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลาง (2, 3) กับจุดที่วงกลมผ่าน (4, -1) จะได้ $r = \sqrt{(2-4)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{20}$

จะได้สมการวงกลม $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = (\sqrt{20})^2$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 20$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 7 = 0$$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่ต้องการคือ $\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 - 4x - 6y - 7 = 0 \}$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุด (2, -1) และ (10, 5) เป็นจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลาง

วิธีทำ เนื่องจากจุดศูนย์กลางของวงกลมคือ จุดกึ่งกลางระหว่างจุด (2, -1) และ (10, 5)

จะได้จุดศูนย์กลางของวงกลมคือ $\left(\frac{2+10}{2}, \frac{-1+5}{2}\right) = (6, 2)$

และรัศมีจะยาวเท่ากับระยะระหว่างจุด (6, 2) กับ (2, -1) ซึ่งจะได้ $r = \sqrt{(6-2)^2+(2+1)^2} = 5$

จะได้ สมการวงกลม $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$

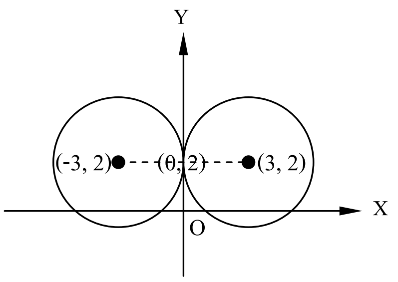
$$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4y + 4 = 25$$

$$x^2 + y^2 - 12x - 4y + 15 = 0$$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่ต้องการคือ $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 12x - 4y + 15 = 0\}$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมมีรัศมี 3 หน่วย และสัมผัสกับแกน Y ที่จุด (0, 2)

วิธีทำ เนื่องจาก วงกลมมีรัศมี 3 หน่วย และสัมผัสกับแกน Y ที่จุด (0, 2)



มี 2 วง คือ วงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (3, 2)

และอีกวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (-3, 2) ดังรูป

ซึ่งวงกลมวงแรกที่ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (3, 2) รัศมี 3 หน่วย

มีสมการเป็น $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$$

และอีกวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (-3, 2) รัศมี 3 หน่วย

มีสมการเป็น $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 9$$

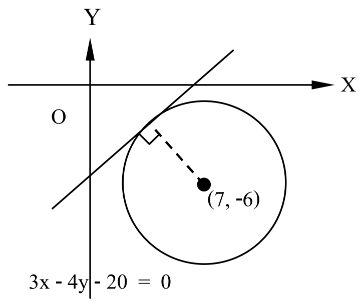
$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ที่ต้องการคือ $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$ **หรือ** $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0\}$

ตัวอย่างที่ 8 จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมมีจุดศูนย์กลางที่ (7, -6) และสัมผัสกับเส้นตรง $3x - 4y - 20 = 0$

วิธีทำ เนื่องจากส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางของวงกลมจะตั้งฉากกับเส้นสัมผัส

นั่นคือรัศมีจะเท่ากับระยะระหว่างจุด(7, -6) กับเส้นตรง $3x - 4y - 20 = 0$ ดังรูป



จะได้ $r = \frac{|3(7)+(-4)(-6)-20|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$

$= \frac{25}{5} = 5$

จะได้สมการ $(x - 7)^2 + (y + 6)^2 = 5^2$

$$x^2 - 14x + 49 + y^2 + 12y + 36 = 25$$

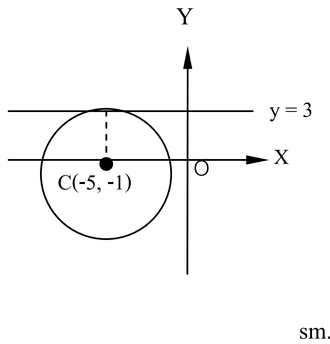
$$x^2 + y^2 - 14x + 12y + 60 = 0$$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ที่ต้องการคือ $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 14x + 12y + 60 = 0\}$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมมีจุดศูนย์กลางที่ C(-5, -1) และสัมผัสกับเส้นตรง $y = 3$

วิธีทำ เนื่องจาก วงกลมมีจุดศูนย์กลางที่ C(-5, -1) และสัมผัสกับเส้นตรง $y = 3$

นั่นคือรัศมีจะเท่ากับระยะระหว่างจุด C(-5, -1) กับเส้นตรง $y = 3$



จะได้ $r = |-1 - 3| = 4$

จะได้สมการ $(x + 5)^2 + (y + 1)^2 = 4^2$

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 + 2y + 1 = 16$$

$$x^2 + y^2 + 10x + 2y + 10 = 0$$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ที่ต้องการคือ $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 + 10x + 2y + 10 = 0\}$

sm.tm

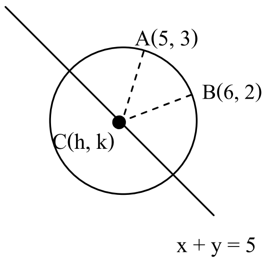
ตัวอย่างที่ 10 จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่ผ่านจุด A(5, 3) และ B(6, 2) และจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $x + y = 5$

วิธีทำ กำหนดให้จุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(h, k) ซึ่งอยู่บนเส้นตรง $x + y = 5$

จะได้ $h + k = 5$ ....(1)

เนื่องจากวงกลมผ่านจุด A(5, 3) และ B(6, 2)

จะได้ $AC = BC$ (รัศมีวงกลมเดียวกัน)



$$\sqrt{(h-5)^2 + (k-3)^2} = \sqrt{(h-6)^2 + (k-2)^2}$$

$$(h - 5)^2 + (k - 3)^2 = (h - 6)^2 + (k - 2)^2$$

$$h^2 - 10h + 25 + k^2 - 6k + 9 = h^2 - 12h + 36 + k^2 - 4k + 4$$

$h - k = 3$ ....(2)

(1) + (2) จะได้ $2h = 8 \quad \therefore\ h = 4$

แทนค่า h ด้วย 4 ลงในสมการ (1) จะได้ $4 + k = 5 \quad \therefore\ k = 1$

จะได้ จุด C(4, 1) เป็นศูนย์กลางของวงกลม และรัศมี = $AC = \sqrt{(4-5)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{5}$

จะได้สมการวงกลม $\sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2} = (\sqrt{5})^2$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = 5$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ที่ต้องการคือ $\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0 \}$

ตัวอย่างที่ 11 จงหาสมการซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (-1, -3) และสัมผัสกับเส้นตรงที่ผ่านจุด (-2, 4) กับ (2, 1)

วิธีทำ สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (-2, 4) กับ (2, 1) คือ $y - 4 = \frac{4-1}{-2-2}(x + 2)$

$y - 4 = -\frac{3}{4}(x + 2)$ หรือ $3x + 4y - 10 = 0$

และรัศมีของวงกลมคือ ระยะระหว่างจุด (-1, -3) กับเส้นตรง $3x + 4y - 10 = 0$

จะได้ $r = \frac{|3(-1) + 4(-3) - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{25}{5} = 5$

ดังนั้น สมการวงกลมที่ต้องการคือ $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 5^2$ หรือ $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 15 = 0$

ตัวอย่างที่ 12 จงหาสมการซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่ผ่านจุด (5, 3), (6, 2) และ (3, -1)

วิธีทำ จากสมการวงกลมรูปทั่วไป $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

วงกลมผ่านจุด (5, 3) จะได้สมการ $5^2 + 3^2 + 5D + 3E + F = 0$

$5D + 3E + F = -34$ ....(1)

วงกลมผ่านจุด (6, 2) จะได้สมการ $6^2 + 2^2 + 6D + 2E + F = 0$

$6D + 2E + F = -40$ ....(2)

วงกลมผ่านจุด (3, -1) จะได้สมการ $3^2 + (-1)^2 + 3D - E + F = 0$

$3D - E + F = -10$ ....(3)

(2) - (1) จะได้ $D - E = -6$ ....(4)

(2) - (3) จะได้ $3D + 3E = -30$ และได้ $D + E = -10$ ....(5)

(4) + (5) จะได้ $2D = -16 \quad \therefore\ D = -8$

แทนค่า D ด้วย -8 ลงในสมการ (5) จะได้ $-8 + E = -10 \quad \therefore\ E = -2$

แทนค่า D ด้วย -8 และ E ด้วย -2 ลงในสมการ (3) จะได้ $3(-8) - (-2) + F = -10 \quad \therefore\ F = 12$

ดังนั้น สมการวงกลมที่ต้องการคือ $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$

การหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม

สมการซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) และรัศมียาว r หน่วย คือ $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

จากสมการ $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

จะได้ $x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2 = 0$ เนื่องจาก h, k และ r เป็นค่าคงตัว

กำหนดให้ $-2h = D$, $-2k = E$ และ $h^2+k^2-r^2 = F$ เมื่อ D, E และ F เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น จะได้สมการวงกลมมีรูปทั่วไป คือ $x^2+y^2+Dx+Ey+F = 0$

จาก $-2h = D$ จะได้ $\boxed{h = -\frac{D}{2}}$ และ $-2k = E$ จะได้ $\boxed{k = -\frac{E}{2}}$

จะได้ จุดศูนย์กลางของวงกลม $(h, k) = \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$

และจาก $h^2+k^2-r^2 = F$ จะได้ $r^2 = h^2+k^2-F$

$r^2 = \left(-\frac{D}{2}\right)^2+\left(-\frac{E}{2}\right)^2 - F$ (แทนค่า h และ k)

$r^2 = \frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4} - F$

$r^2 = \frac{1}{4}(D^2+E^2-4F)$

$\therefore\ r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$

หรือ $r = \sqrt{\left(-\frac{D}{2}\right)^2+\left(-\frac{E}{2}\right)^2-F}$

หรือ $r = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2+\left(\frac{E}{2}\right)^2-F}$

$\because \left(-\frac{D}{2}\right)^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2$ และ $\left(-\frac{E}{2}\right)^2 = \left(\frac{E}{2}\right)^2$

นั่นคือ สมการวงกลมที่อยู่ในรูป $x^2+y^2+Dx+Ey+F = 0$ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$
และมีรัศมี $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ หน่วย หรือ $r = \sqrt{\left(-\frac{D}{2}\right)^2+\left(-\frac{E}{2}\right)^2-F}$

การพิจารณาค่า D^2+E^2-4F

(1) ถ้า $D^2+E^2-4F > 0$ แล้ว $r > 0$ กราฟของสมการเป็นวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$
และมีรัศมีเท่ากับ $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ หน่วย

(2) ถ้า $D^2+E^2-4F = 0$ แล้ว $r = 0$ กราฟของสมการเป็นจุด เช่น สมการ $x^2+y^2-2x+4y+5 = 0$
ซึ่ง $D = -2$, $E = 4$ และ $F = 5$ จะได้ $(-2)^2+4^2-4(5) = 0$ และ $r = 0$ กราฟเป็นจุด

(3) ถ้า $D^2+E^2-4F < 0$ แล้ว r ไม่เป็นจำนวนจริง เขียนกราฟไม่ได้ เช่น สมการ $x^2+y^2+2x+4y+10 = 0$
ซึ่ง $D = 2$, $E = 4$ และ $F = 10$ จะได้ $2^2+4^2-4(10) = -20$ เขียนกราฟไม่ได้

ตัวอย่างที่ 13 จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของสมการวงกลม $x^2+y^2-6x+4y-3 = 0$

วิธีที่ 1 จากสมการ $x^2+y^2-6x+4y-3 = 0$ ซึ่ง $D = -6$, $E = 4$ และ $F = -3$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) = \left(\frac{6}{2}, -\frac{4}{2}\right) = (3, -2)$

และรัศมี $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F} = \frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F} = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+4^2-4(-3)}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{36+16+12} = \frac{1}{2}\sqrt{64} = \frac{1}{2}(8) = 4$

ดังนั้น กราฟของวงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (3, -2) และรัศมียาว 4 หน่วย

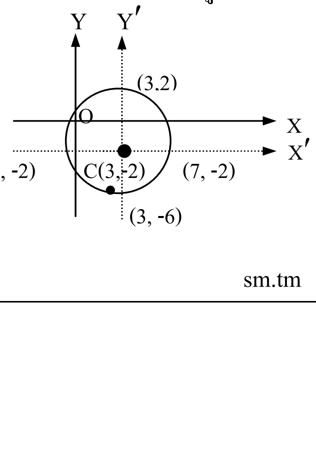
วิธีที่ 2 จากสมการ $x^2+y^2-6x+4y-3 = 0$ จัดให้อยู่ในรูป $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$ โดยใช้กำลังสองสมบูรณ์

จะได้ $(x^2-6x)+(y^2+4y) = 3$

$(x^2-6x+9)+(y^2+4y+4) = 3+9+4$

$(x-3)^2+(y+2)^2 = 16$

$(x-3)^2+(y+2)^2 = 4^2$



ดังนั้น กราฟของวงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (3, -2) และรัศมียาว 4 หน่วย

sm.tm

ตัวอย่างที่ 14 จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของสมการวงกลมต่อไปนี้

(1) $x^2 + y^2 + 10x + 24y + 69 = 0$

วิธีที่ 1 จากสมการ $x^2 + y^2 + 10x + 24y + 69 = 0$ ซึ่ง $D = 10,\ E = 24$ และ $F = 69$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}) = (-\frac{10}{2}, -\frac{24}{2}) = (-5, -12)$

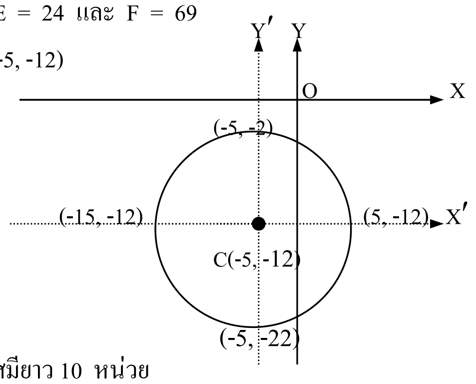
และรัศมี $r = \sqrt{(-\frac{D}{2})^2 + (-\frac{E}{2})^2 - F}$

$= \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2 - 69}$

$= \sqrt{25 + 144 - 69}$

$= \sqrt{100}$

$= 10$



ดังนั้น กราฟของวงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (-5, -12) และรัศมียาว 10 หน่วย

วิธีที่ 2 จากสมการ $x^2 + y^2 + 10x + 24y + 69 = 0$ จัดให้อยู่ในรูป $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

โดยใช้กำลังสองสมบูรณ์ จะได้ $(x^2 + 10x) + (y^2 + 24y) = -69$

$$(x^2 + 10x + 25) + (y^2 + 24y + 144) = -69 + 25 + 144$$

$$(x + 5)^2 + (y + 12)^2 = 100$$

$$(x + 5)^2 + (y + 12)^2 = 10^2$$

ดังนั้น กราฟของวงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (-5, -12) และรัศมียาว 10 หน่วย

(2) $2x^2 + 2y^2 - 3x + 4y + 3 = 0$

วิธีที่ 1 จากสมการ $2x^2 + 2y^2 - 3x + 4y + 3 = 0$ นำ 2 มาหารตลอด

จะได้ $x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + 2y + \frac{3}{2} = 0$ ซึ่ง $D = -\frac{3}{2},\ E = 2$ และ $F = \frac{3}{2}$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}) = \left(-\frac{-\frac{3}{2}}{2}, -\frac{2}{2}\right) = (\frac{3}{4}, -1)$

และรัศมี $r = \sqrt{(-\frac{D}{2})^2 + (-\frac{E}{2})^2 - F}$

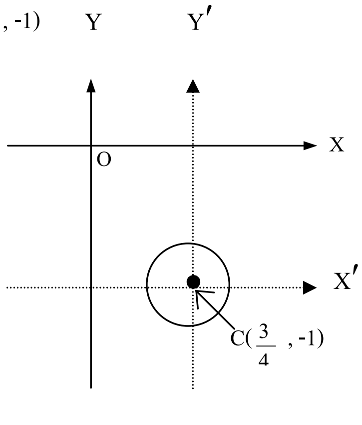
$= \sqrt{(\frac{3}{4})^2 + (-1)^2 - \frac{3}{2}}$

$= \sqrt{\frac{9}{16} + 1 - \frac{3}{2}}$

$= \sqrt{\frac{9 + 16 - 24}{16}}$

$= \sqrt{\frac{1}{16}}$

$= \frac{1}{4}$



ดังนั้น กราฟของวงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(\frac{3}{4}, -1)$ และรัศมียาว $\frac{1}{4}$ หน่วย

วิธีที่ 2 จากสมการ $2x^2 + 2y^2 - 3x + 4y + 3 = 0$ นำ 2 มาหารตลอด

จะได้ $x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + 2y + \frac{3}{2} = 0$ จัดให้อยู่ในรูป $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

โดยใช้กำลังสองสมบูรณ์ จะได้ $(x^2 - \frac{3}{2}x) + (y^2 + 2y) = -\frac{3}{2}$

$$(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}) + (y^2 + 2y + 1) = -\frac{3}{2} + \frac{9}{16} + 1$$

$$(x - \frac{3}{4})^2 + (y + 1)^2 = \frac{1}{16}$$

$$(x - \frac{3}{4})^2 + (y + 1)^2 = (\frac{1}{4})^2$$

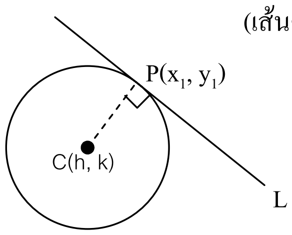
ดังนั้น กราฟของวงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(\frac{3}{4}, -1)$ และรัศมียาว $\frac{1}{4}$ หน่วย

การหาสมการเส้นสัมผัสวงกลม

กรณีที่ 1 ทราบจุดศูนย์กลางของวงกลม และจุดสัมผัส เราสามารถหาสมการเส้นสัมผัสวงกลมได้ดังนี้

สมมุติให้วงกลมมีจุดศูนย์กลางที่ C(h, k) และมีเส้นตรง L (ซึ่งไม่ขนานกับแกน Y) สัมผัสกับวงกลมนี้ที่จุด $P(x_1, y_1)$

ดังรูป (เส้นตรง L จะตั้งฉากกับรัศมี CP ที่จุดสัมผัส P)



วิธีการหาสมการของเส้นตรง L มีดังนี้

(1) ความชันของ CP = $m = \dfrac{y_1 - k}{x_1 - h}$

(2) จะได้ ความชันของเส้นตรง L = $-\dfrac{1}{m}$ (Θ $m(-\dfrac{1}{m}) = -1$)

(3) จะได้สมการเส้นตรง L คือ $y - y_1 = -\dfrac{1}{m}(x - x_1)$

ตัวอย่างที่ 15 จงหาสมการเส้นตรงซึ่งสัมผัสกับวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ C(-2, 7) โดยสัมผัสที่จุด P(1, 3)

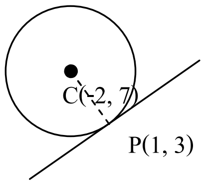
วิธีทำ จากโจทย์ วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ C(-2, 7) และเส้นตรงสัมผัสกับวงกลมที่จุด P(1, 3)

จะได้ ความชันของรัศมี $CP = \dfrac{3-7}{1+2} = -\dfrac{4}{3}$ $\therefore$ ความชันของเส้นสัมผัส = $\dfrac{3}{4}$

สมการเส้นสัมผัส คือ $y - 3 = \dfrac{3}{4}(x - 1)$

$$4y - 12 = 3x - 3$$

$$3x - 4y + 9 = 0$$



ดังนั้น สมการเส้นสัมผัสที่ต้องการ คือ $3x - 4y + 9 = 0$

กรณีที่ 2 ทราบสมการของวงกลม และจุดสัมผัส เราสามารถหาสมการเส้นสัมผัสวงกลมได้ตามวิธีดังกล่าว หรือหาได้ดังวิธีต่อไปนี้

จัดสมการให้อยู่ในรูป $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ และเส้นตรง L สัมผัสวงกลมที่จุด $P(x_1, y_1)$

จะได้สมการเส้นตรง L คือ $(x_1 - h)(x - h) + (y_1 - k)(y - k) = r^2$

ตัวอย่างที่ 16 กำหนดสมการ $x^2 + (y - 2)^2 = 25$ จงหาสมการเส้นตรงซึ่งสัมผัสกับวงกลมนี้ที่จุด (-4, 5)

วิธีทำ จากโจทย์ สมการวงกลม $x^2 + (y - 2)^2 = 25$ มีจุดศูนย์กลางที่จุด (0, 2) และจุดสัมผัสอยู่ที่ (-4, 5)

จะได้สมการเส้นสัมผัส $(-4 - 0)(x - 0) + (5 - 2)(y - 2) = 25$

$$-4x + 3y - 6 = 25$$

$$4x - 3y + 31 = 0$$

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัสที่ต้องการ คือ $4x - 3y + 31 = 0$

ตัวอย่างที่ 17 กำหนดสมการ $x^2 + y^2 + 5x - 6y - 21 = 0$ จงหาสมการเส้นตรงซึ่งสัมผัสกับวงกลมนี้ที่จุด (2, -1)

วิธีทำ จากโจทย์ สมการวงกลม $x^2 + y^2 + 5x - 6y - 21 = 0$ จัดให้อยู่ในรูป $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$$(x^2 + 5x + \frac{25}{4}) + (y^2 - 6y + 9) = 21 + \frac{25}{4} + 9$$

$$(x + \frac{5}{2})^2 + (y - 3)^2 = \frac{145}{4}$$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-\frac{5}{2}, 3)$ และจุดสัมผัส (2, -1)

จะได้สมการเส้นตรง $(x_1 + \dfrac{5}{2})(x + \dfrac{5}{2}) + (y_1 - 3)(y - 3) = \dfrac{145}{4}$

$$(2 + \frac{5}{2})(x + \frac{5}{2}) + (-1 - 3)(y - 3) = \frac{145}{4}$$

$$\frac{9}{2}(x + \frac{5}{2}) + (-4)(y - 3) = \frac{145}{4} \quad \text{หรือ} \quad \frac{9}{2}x + \frac{45}{4} - 4y + 12 = \frac{145}{4}$$

$$18x + 45 - 16y + 48 = 145 \quad \text{หรือ} \quad 18x - 16y - 52 = 0$$

$$9x - 8y - 26 = 0$$

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัสที่ต้องการ คือ $9x - 8y - 26 = 0$

sm.tm

ใบงานที่ 1.8

1. จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมดังที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$ และรัศมียาว 6 หน่วย

(2) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$ และรัศมียาว $\sqrt{5}$ หน่วย

(3) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 3)$ และรัศมียาว 4 หน่วย

(4) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-5, 0)$ และรัศมียาว $\frac{2}{3}$ หน่วย

(5) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2, 3)$ และรัศมียาว 5 หน่วย

(6) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{2})$ และรัศมียาว 3 หน่วย

(7) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ และรัศมียาว $\sqrt{2}$ หน่วย

sm.tm

2. จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (-1, 2) และผ่านจุด (4, 3)

3. จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (3, -4) และเส้นรอบวงยาว 12π หน่วย

4. จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมมีรัศมี 2 หน่วย และสัมผัสกับเส้นตรง $y = 5$ ที่จุด (3, 5)

5. จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (3, 2) และสัมผัสกับเส้นตรง $3x - 4y + 10 = 0$

sm.tm

6. จงหาสมการวงกลมที่ผ่านจุด A(1, -2) และ B(4, 3) และจุดศูนย์กลางอยู่บนแกน Y

7. จงหาหาสมการวงกลมที่ผ่านจุด A(2, 3) และ B(3, 6) และจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $2x + y - 2 = 0$

8. จงหาสมการวงกลมซึ่งมีกราฟผ่านจุด (4, 5), (1, -4) และ (3, -2)

sm.tm

9. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมพร้อมทั้งเขียนกราฟในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$

(2) $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 5 = 0$

(3) $4x^2 + 4y^2 + 12x - 16y - 11 = 0$

(4) $2x^2 + 2y^2 - 5x + 3y + 2 = 0$

10. จงหาสมการเส้นตรงซึ่งสัมผัสกับวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ C(3, -2) โดยสัมผัสที่จุด P(7, 1)

11. จงหาสมการเส้นตรงซึ่งสัมผัสกับวงกลม $x^2 + y^2 + 2y - 19 = 0$ ที่จุด (-4, -3)

12. จงหาสมการเส้นตรงซึ่งสัมผัสกับวงกลม $x^2 + y^2 + 4x + 8y - 21 = 0$ ที่จุด (2, 1)

13. จงหาสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสของวงกลม $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ ที่จุดสัมผัส (3, -2)

14. จงหาสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสของวงกลม $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$ ที่จุดสัมผัส (4, 1)

15. จงหาสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสของวงกลม $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 16 = 0$ ที่จุดสัมผัส (2, -4)

sm.tm

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9

เรื่อง **ภาคตัดกรวย(พาราโบลา)** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 7 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. บอกความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นพาราโบลาเมื่อกำหนดส่วนต่างๆ ของพาราโบลาให้ได้
2. เขียนกราฟและหาส่วนต่างๆ ของพาราโบลาเมื่อกำหนดความสัมพันธ์ของกราฟพาราโบลาให้ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกบทนิยามของพาราโบลาได้
2. บอกความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (0, 0) ได้
3. เขียนกราฟและบอกส่วนต่างๆ ของกราฟพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (0, 0) ได้
4. บอกความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h, k) ได้
5. เขียนกราฟและบอกส่วนต่างๆ ของกราฟพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h, k) ได้

2. แนวความคิดหลัก (สาระสำคัญ)

บทนิยาม พาราโบลา คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งอยู่ห่างจากเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่งบนระนาบและจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเส้นนั้น เป็นระยะทางเท่ากันเสมอ

ส่วนประกอบของพาราโบลา

1. จุดคงที่ คือ จุดโฟกัสของพาราโบลา
2. เส้นตรงคงที่ คือไดเรกตริกซ์(Directrix)
3. เส้นตรงที่ผ่านจุดโฟกัสและตั้งฉากกับไดเรกตริกซ์คือ แกนพาราโบลา หรือแกนสมมาตร
4. จุดที่แกนพาราโบลาตัดกับโค้งของพาราโบลา คือ จุดยอด(Vertex)ของพาราโบลา
5. ส่วนของเส้นตรงที่ผ่านโฟกัสและตั้งฉากกับแกนพาราโบลาโดยจุดปลายทั้งสองอยู่บนโค้งของพาราโบลาคือ ลาตัสเรกตัม(Latus rectum)

3. เนื้อหาสาระ

1. บทนิยามของพาราโบลา
2. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นพาราโบลา โดยที่

2.1 จุดยอดอยู่ที่จุด (0, 0) จุดโฟกัสอยู่ที่จุด (c, 0) และไดเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง $x = -c$ มีแกน X เป็นแกนสมมาตร จะมีสมการเป็น $y^2 = 4cx$

2.2 จุดยอดอยู่ที่จุด (0, 0) จุดโฟกัสอยู่ที่จุด (0, c) และไดเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง $y = -c$ มีแกน Y เป็นแกนสมมาตร จะมีสมการเป็น $x^2 = 4cy$

2.3 จุดยอดอยู่ที่จุด (h, k) จุดโฟกัสอยู่ที่จุด (h + c, k) และไดเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง $x = h - c$ มีแกนสมมาตรขนานกับแกน X คือเส้นตรง $y = k$ จะมีสมการเป็น $(y - k)^2 = 4c(x - h)$

2.4 จุดยอดอยู่ที่จุด (h, k) จุดโฟกัสอยู่ที่จุด (h, k + c) และไดเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง $y = k - c$ มีแกนสมมาตรขนานกับแกน Y คือเส้นตรง $x = h$ จะมีสมการเป็น $(x - h)^2 = 4c(y - k)$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ให้นักเรียนทบทวนความรู้เกี่ยวกับการเขียนกราฟ และการเลื่อนแกนทางขนาน
2. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้ที่ 1.9 แล้วสรุปบทนิยามของพาราโบลา
3. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้ที่ 1.9 แล้วบอกส่วนประกอบของพาราโบลา
4. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้แล้วบอกความสัมพันธ์ ซึ่งมีกราฟเป็นพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (0, 0) จุดโฟกัสอยู่ที่จุด (c, 0) มีแกน X เป็นแกนสมมาตร พร้อมทั้งเขียนกราฟ
5. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้แล้วบอกความสัมพันธ์ ซึ่งมีกราฟเป็นพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (0, 0) จุดโฟกัสอยู่ที่จุด (0, c) มีแกน Y เป็นแกนสมมาตร พร้อมทั้งเขียนกราฟ
6. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้แล้วบอกความสัมพันธ์ ซึ่งมีกราฟเป็นพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h, k) จุดโฟกัสอยู่ที่จุด (h + c, k) มีแกนสมมาตรขนานกับแกน X คือเส้นตรง $y = k$ พร้อมทั้งเขียนกราฟ
7. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้แล้วบอกความสัมพันธ์ ซึ่งมีกราฟเป็นพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h, k) จุดโฟกัสอยู่ที่จุด (h, k + c) มีแกนสมมาตรขนานกับแกน Y คือเส้นตรง $x = h$ พร้อมทั้งเขียนกราฟ
8. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้แล้วหาจุดยอด จุดโฟกัส เส้นตรงไดเรกตริกซ์ แกนสมมาตร ลาตัสเรกตัม พร้อมทั้งเขียนกราฟ
9. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 1.9

5. แหล่งการการเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 1.9
2. ใบงานที่ 1.9
3. หนังสือ
4. แผ่นใส

6. กระบวนการวัดผลประเมินผล

สิ่งที่วัดผล	วิธีวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
1. ด้านความรู้	1. ตรวจใบงาน 2. ทดสอบ	1. ใบงานที่ 1.9 2. แบบทดสอบ	1. ทำถูกอย่างน้อย 95 % 2. ทำถูกอย่างน้อย 95 %
2. ด้านทักษะ	สังเกตจากการบอกหรือการสรุป	แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 90 %
3. ด้านคุณลักษณะ	สังเกต	แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 90 %

7. บันทึกหลังสอน

……..
……..
……..

8. กิจกรรมเสนอแนะ

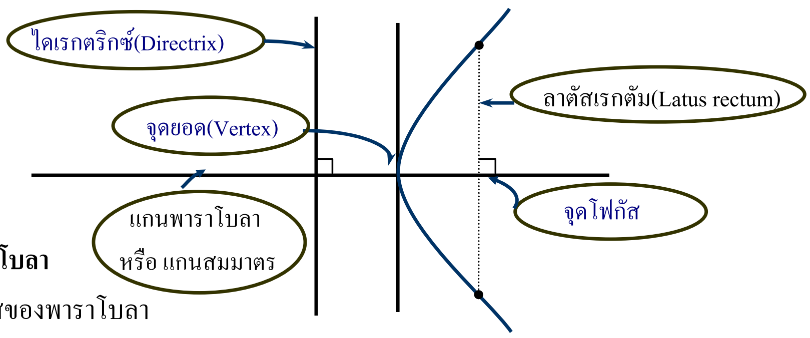
……..
……..
……..

ใบความรู้ที่ 1.9 (ภาคตัดกรวย(พาราโบลา))

พาราโบลา (Parabola)

บทนิยาม พาราโบลา คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งอยู่ห่างจากเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่งบนระนาบ และจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเส้นนั้น เป็นระยะทางเท่ากันเสมอ

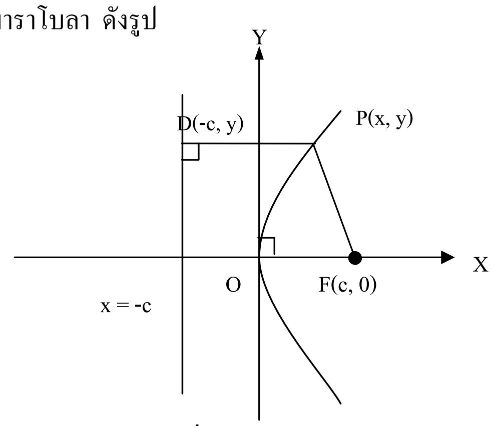
ลักษณะของพาราโบลา



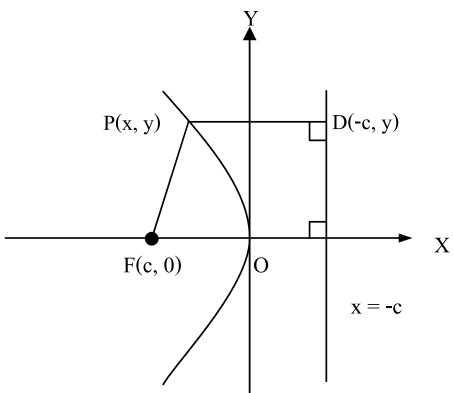
ส่วนประกอบของพาราโบลา

1. จุดคงที่ คือ จุดโฟกัสของพาราโบลา
2. เส้นตรงคงที่ คือไดเรกตริกซ์(Directrix)
3. เส้นตรงที่ผ่านจุดโฟกัสและตั้งฉากกับไดเรกตริกซ์คือ แกนพาราโบลา หรือแกนสมมาตร
4. จุดที่แกนพาราโบลาตัดกับโค้งของพาราโบลา คือ จุดยอด(Vertex)ของพาราโบลา
5. ส่วนของเส้นตรงที่ผ่านโฟกัสและตั้งฉากกับแกนพาราโบลาโดยจุดปลายทั้งสองอยู่บนโค้งของพาราโบลา คือ ลาตัสเรกตัม(Latus rectum)

1. พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด(0, 0) จุดโฟกัสอยู่ที่ (c, 0) ไดเรกตริกซ์คือ เส้นตรง $x = -c$ และมีแกน X เป็นแกนของพาราโบลา ดังรูป



เมื่อ $c > 0$ เปิดทางขวา



เมื่อ $c < 0$ เปิดทางซ้าย

กำหนดให้ P(x, y) เป็นจุดใดๆ บนพาราโบลา และ PD ตั้งฉากกับไดเรกตริกซ์ที่จุด D(-c, y)

จากบทนิยาม จะได้ $PF = PD$

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = |x-(-c)|$$

$$(x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2$$

จะได้ $y^2 = 4cx$

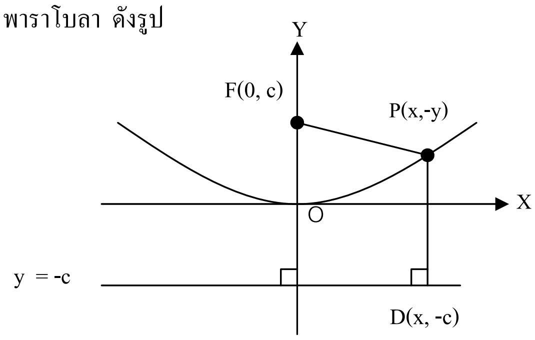
นั่นคือ $\boxed{y^2 = 4cx}$ เป็นสมการของพาราโบลาจุดโฟกัสอยู่ที่จุด(c, 0) ไดเรกตริกซ์คือ เส้นตรง $x = -c$ และมีแกน X เป็นแกนของพาราโบลา

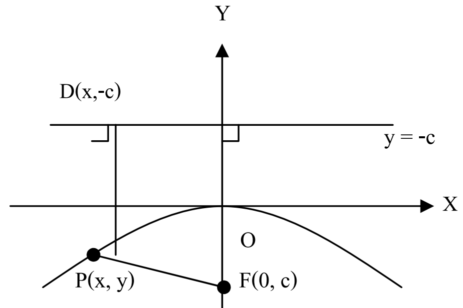
ถ้า $c > 0$ แล้ว $y^2 = 4cx$ เป็นสมการของพาราโบลาที่มีกราฟเปิดทางขวา

ถ้า $c < 0$ แล้ว $y^2 = 4cx$ เป็นสมการของพาราโบลาที่มีกราฟเปิดทางซ้าย

sm.tm

2. พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด(0, 0) จุดโฟกัสอยู่ที่ (0, c) ไดเรกตริกซ์คือ เส้นตรง $y = -c$ และมีแกน Y เป็นแกนของพาราโบลา ดังรูป





เมื่อ $c > 0$ หงายขึ้น เมื่อ $c < 0$ คว่ำลง

กำหนดให้ P(x, y) เป็นจุดใดๆบนพาราโบลา และ PD ตั้งฉากกับไดเรกตริกซ์ที่จุด D(x, -c)

จากบทนิยาม จะได้ $PF = PD$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = |y-(-c)|$$

$$x^2 + (y-c)^2 = (y+c)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = y^2 + 2cy + c^2$$

จะได้ $x^2 = 4cy$

นั่นคือ $\boxed{x^2 = 4cy}$ เป็นสมการของพาราโบลาจุดโฟกัสอยู่ที่จุด(0, c) ไดเรกตริกซ์คือ เส้นตรง $y = -c$ และมีแกน Y เป็นแกนของพาราโบลา

ถ้า $c > 0$ แล้ว $x^2 = 4cy$ เป็นสมการของพาราโบลาที่มีกราฟหงายขึ้น

ถ้า $c < 0$ แล้ว $x^2 = 4cy$ เป็นสมการของพาราโบลาที่มีกราฟคว่ำลง

หมายเหตุ
1. แกนของพาราโบลา(แกนสมมาตร)จะผ่านจุดยอดและจุดโฟกัส
2. ระยะจากจุดยอดไปยังโฟกัสเท่ากับระยะจากจุดยอดไปยังไดเรกตริกซ์ ซึ่งต่างก็เท่ากับ $|c|$ หน่วย
3. ความยาวของลาตัสเรกตัม (Latus rectum) เท่ากับ $|4c|$ หน่วย

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการพาราโบลา จากสิ่งที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

(1) จุดโฟกัสอยู่ที่ (5, 0) และจุดยอดอยู่ที่ (0, 0)

วิธีทำ จากโจทย์ จุดโฟกัสอยู่ที่ (5, 0) และจุดยอดอยู่ที่ (0, 0)

แสดงว่าแกนพาราโบลาคือ แกน X (เส้นตรง $y = 0$)

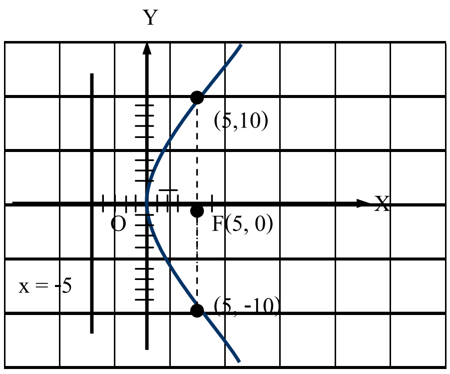
$c = 5$ เป็นกราฟพาราโบลาเปิดทางขวา

ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $x = -5$

ลาตัสเรกตัมยาว $|4(5)| = 20$ หน่วย

สมการอยู่ในรูป $y^2 = 4cx$

จะได้ สมการ $y^2 = 4(5)x$ หรือ $y^2 = 20x$



(2) จุดโฟกัสอยู่ที่ (-3, 0) และไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $x = 3$

วิธีทำ จากโจทย์ จุดโฟกัสอยู่ที่ (-3, 0) และไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $x = 3$

แสดงว่าแกนพาราโบลาคือ แกน X (เส้นตรง $y = 0$)

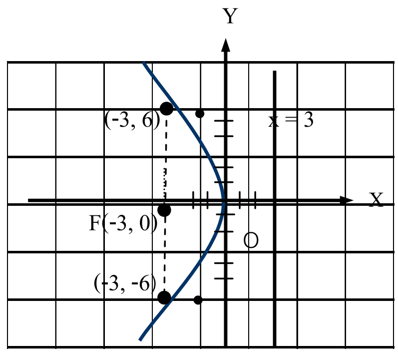
$c = -3$ เป็นกราฟพาราโบลาเปิดทางซ้าย

จุดยอดอยู่ที่ (0, 0) ลาตัสเรกตัมยาว $|4(-3)| = 12$ หน่วย

สมการอยู่ในรูป $y^2 = 4cx$

จะได้ สมการ $y^2 = 4(-3)x$

$y^2 = -12x$



ตัวอย่างที่ 2 จงหาสมการของพาราโบลา จากสิ่งที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

(1) จุดโฟกัสอยู่ที่ (0, 5) และจุดยอดอยู่ที่ (0, 0)

วิธีทำ จากโจทย์ จุดโฟกัสอยู่ที่ (0, 5) และจุดยอดอยู่ที่ (0, 0)

แสดงว่าแกนพาราโบลาคือ แกน Y (เส้นตรง $x = 0$)

$c = 5$ เป็นกราฟพาราโบลาหงายขึ้น

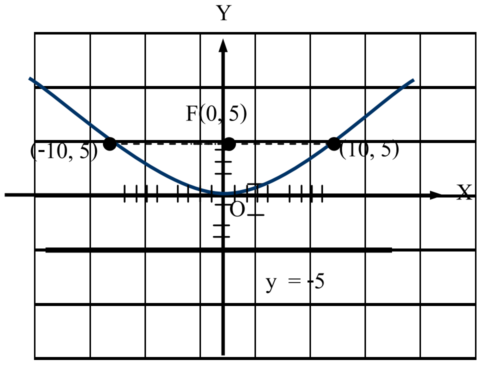
ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $y = -5$

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $|4(5)| = 20$ หน่วย

สมการอยู่ในรูป $x^2 = 4cy$

จะได้ สมการ $x^2 = 4(5)y$

$x^2 = 20y$



(2) จุดโฟกัสอยู่ที่ (0, -3) และไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $y = 3$

วิธีทำ จากโจทย์ จุดโฟกัสอยู่ที่ (0, -3) และไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $y = 3$

แสดงว่าแกนพาราโบลาคือ แกน Y (เส้นตรง $x = 0$)

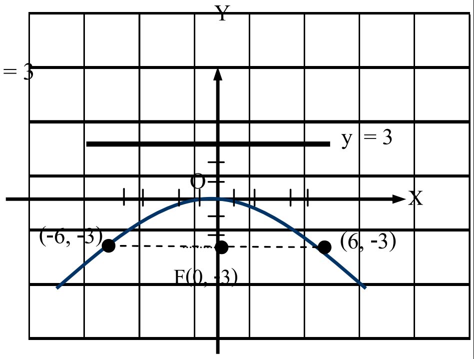
$c = -3$ เป็นกราฟพาราโบลาคว่ำลง จุดยอดอยู่ที่ (0, 0)

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $|4(-3)| = 12$ หน่วย

สมการอยู่ในรูป $x^2 = 4cy$

จะได้ สมการ $x^2 = 4(-3)y$

$x^2 = -12y$



(3) ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $y = -\frac{3}{4}$ และจุดยอดอยู่ที่ (0, 0)

วิธีทำ จากโจทย์ ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $y = -\frac{3}{4}$ และจุดยอดอยู่ที่ (0, 0)

แสดงว่าแกนพาราโบลาคือ แกน Y (เส้นตรง $x = 0$)

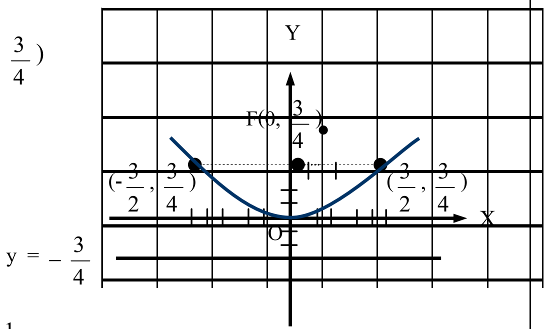
$c = \frac{3}{4}$ เป็นกราฟพาราโบลาหงายขึ้น จุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, \frac{3}{4})$

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $|4(\frac{3}{4})| = 3$ หน่วย

สมการอยู่ในรูป $x^2 = 4cy$

จะได้ สมการ $x^2 = 4(\frac{3}{4})y$

$x^2 = 3y$



(4) จุดโฟกัสอยู่ที่ $(-\frac{1}{2}, 0)$ และไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $x = \frac{1}{2}$

วิธีทำ จากโจทย์ จุดโฟกัสอยู่ที่ $(-\frac{1}{2}, 0)$ และไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $x = \frac{1}{2}$

แสดงว่าแกนพาราโบลาคือ แกน X (เส้นตรง $y = 0$)

$c = -\frac{1}{2}$ เป็นกราฟพาราโบลาเปิดทางซ้าย

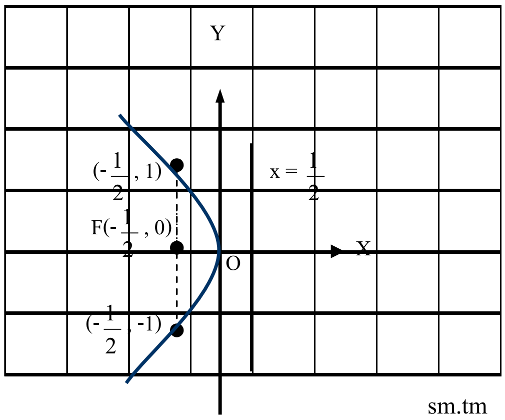
จุดยอดอยู่ที่ (0, 0)

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $|4(-\frac{1}{2})| = 2$ หน่วย

สมการอยู่ในรูป $y^2 = 4cx$

จะได้ สมการ $y^2 = 4(-\frac{1}{2})x$

$y^2 = -2x$



sm.tm

ตัวอย่างที่ 3 จงหาจุดยอด โฟกัส ไดเรกตริกซ์ แกนพาราโบลา ความยาวของลาตัสเรกตัม พร้อมทั้งเขียนกราฟ จากสมการพาราโบลาในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) $y^2 = 20x$

วิธีทำ จากสมการ $y^2 = 20x$ จะได้ $y^2 = 4(5)x$

แสดงว่า จุดยอดอยู่ที่ (0, 0)

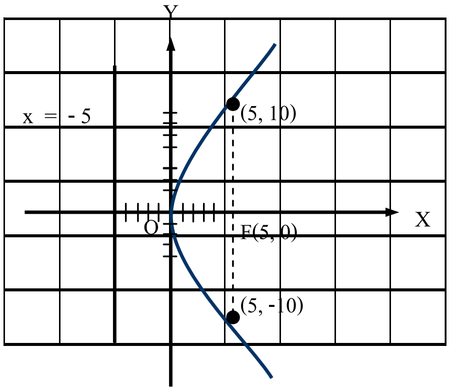
แกนพาราโบลาคือ แกน X

c = 5 เป็นกราฟพาราโบลาเปิดทางขวา

จุดโฟกัสอยู่ที่ (5, 0)

ไดเรกตริกซ์คือ เส้นตรง x = - 5

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $|4(5)| = 20$ หน่วย



(2) $y^2 = -6x$

วิธีทำ จากสมการ $y^2 = -6x$ จะได้ $y^2 = 4(-\frac{3}{2})x$

แสดงว่าจุดยอดอยู่ที่ (0, 0)

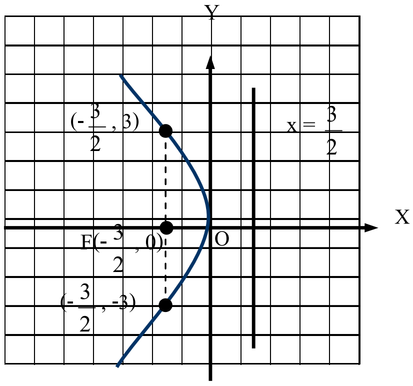
แกนพาราโบลาคือ แกน X

$c = -\frac{3}{2}$ เป็นกราฟพาราโบลาเปิดทางซ้าย

จุดโฟกัสอยู่ที่ $(-\frac{3}{2}, 0)$

ไดเรกตริกซ์คือ เส้นตรง $x = \frac{3}{2}$

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $|4(-\frac{3}{2})| = 6$ หน่วย



(3) $x^2 = 6y$

วิธีทำ จากสมการ $x^2 = 6y$ จะได้ $x^2 = 4(\frac{3}{2})y$

แสดงว่า จุดยอดอยู่ที่ (0, 0)

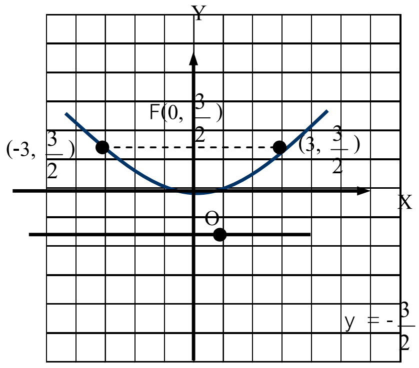
แกนพาราโบลาคือ แกน Y

$c = \frac{3}{2}$ เป็นกราฟพาราโบลาหงายขึ้น

จุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, \frac{3}{2})$

ไดเรกตริกซ์คือ เส้นตรง $y = -\frac{3}{2}$

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $|4(\frac{3}{2})| = 6$ หน่วย



(4) $x^2 = -10y$

วิธีทำ จากสมการ $x^2 = -10y$ จะได้ $x^2 = 4(-\frac{5}{2})y$

แสดงว่า จุดยอดอยู่ที่ (0, 0)

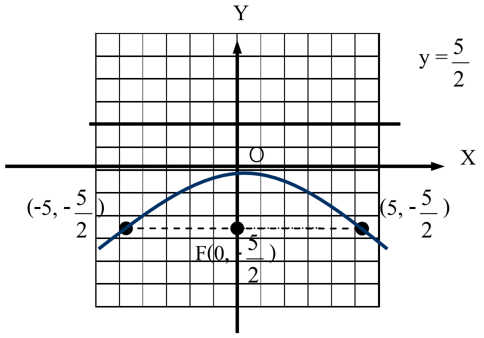
แกนพาราโบลาคือ แกน Y

$c = -\frac{5}{2}$ เป็นกราฟพาราโบลาคว่ำลง

จุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, -\frac{5}{2})$

ไดเรกตริกซ์คือ เส้นตรง $y = \frac{5}{2}$

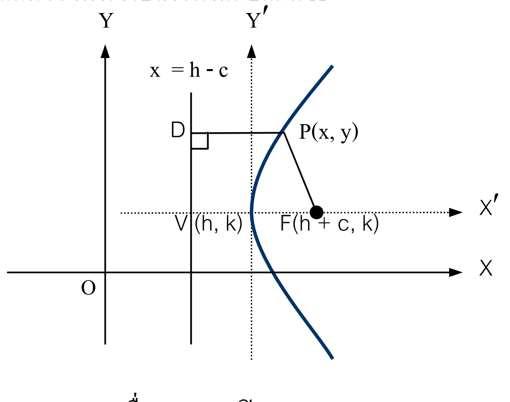
ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $|4(-\frac{5}{2})| = 10$ หน่วย



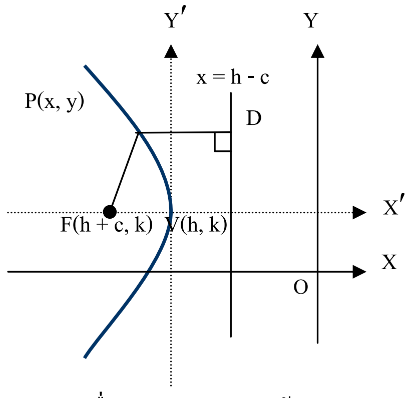
sm.tm

การหาสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด(h, k) และมีแกนขนานกับแกน X หรือแกน Y

1. เมื่อแกนของพาราโบลาขนานกับแกน X



เมื่อ $c > 0$ เปิดทางขวา



เมื่อ $c < 0$ เปิดทางซ้าย

กำหนดให้ V(h, k) เป็นจุดยอด และ จุดโฟกัสอยู่ที่ F(h + c, k) เมื่อเลื่อนแกนไปที่จุด (h, k) จะได้จุดยอด และโฟกัสของพาราโบลาเมื่อเทียบกับแกนใหม่มีพิกัดเป็น (0, 0) และ (c, 0) ตามลำดับ

ถ้าให้ $P(x', y')$ เป็นพิกัดของจุดบนพาราโบลาเมื่อเทียบกับแกนใหม่ จะได้สมการของพาราโบลาเมื่อเทียบกับแกนใหม่ คือ $(y')^2 = 4cx'$ แต่ $y' = y - k$ และ $x' = x - h$

ดังนั้นจะได้สมการพาราโบลาเมื่อเทียบกับแกนเดิมคือ $(y - k)^2 = 4c(x - h)$

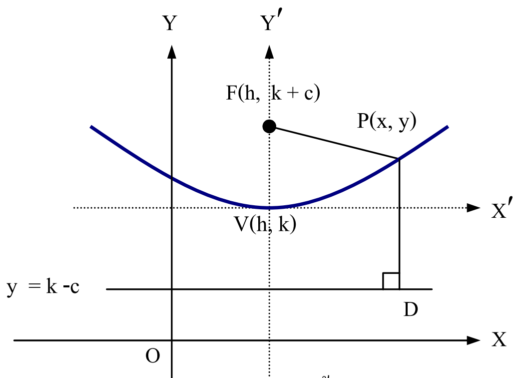
นั่นคือ $\boxed{(y - k)^2 = 4c(x - h)}$ เป็นสมการของพาราโบลา มีจุดยอดอยู่ที่ (h, k) โฟกัสอยู่ที่จุด (h +c, k)

ไดเรกตริกซ์คือ เส้นตรง $x = h - c$ แกนของพาราโบลาขนานกับแกน X อยู่บนเส้นตรง $y = k$

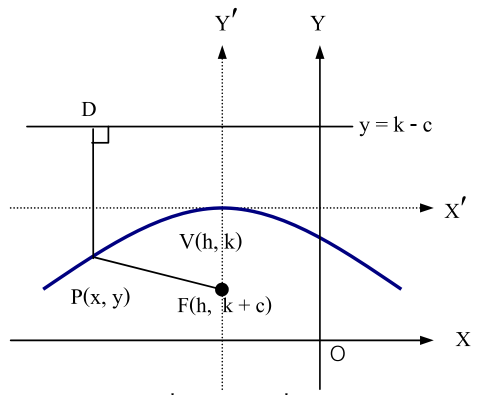
ความยาวของลาตัสเรกตัม(Latus rectum) เท่ากับ $|4c|$ หน่วย

เมื่อ $c > 0$ เป็นกราฟพาราโบลาเปิดทางขวา และ $c < 0$ เป็นกราฟพาราโบลาเปิดทางซ้าย

2. เมื่อแกนของพาราโบลาขนานกับแกน Y



เมื่อ $c > 0$ หงายขึ้น



เมื่อ $c < 0$ คว่ำลง

กำหนดให้ V(h, k) เป็นจุดยอด และ จุดโฟกัสอยู่ที่ F(h , k + c) เมื่อเลื่อนแกนไปที่จุด (h, k) จะได้จุดยอด และโฟกัสของพาราโบลาเมื่อเทียบกับแกนใหม่มีพิกัดเป็น (0, 0) และ (0, c) ตามลำดับ

ถ้าให้ $P(x', y')$ เป็นพิกัดของจุดบนพาราโบลาเมื่อเทียบกับแกนใหม่ จะได้สมการของพาราโบลาเมื่อเทียบกับแกนใหม่ คือ $(x')^2 = 4cy'$ แต่ $x' = x - h$ และ $y' = y - k$

ดังนั้นจะได้สมการพาราโบลาเมื่อเทียบกับแกนเดิมคือ $(x - h)^2 = 4c(y - k)$

นั่นคือ $\boxed{(x - h)^2 = 4c(y - k)}$ เป็นสมการของพาราโบลา มีจุดยอดอยู่ที่ (h, k) โฟกัสอยู่ที่จุด (h , k + c)

ไดเรกตริกซ์คือ เส้นตรง $y = k - c$ แกนของพาราโบลาขนานกับแกน Y อยู่บนเส้นตรง $x = h$

ความยาวของลาตัสเรกตัม(Latus rectum) เท่ากับ $|4c|$ หน่วย

เมื่อ $c > 0$ เป็นกราฟพาราโบลาหงายขึ้น และ $c < 0$ เป็นกราฟพาราโบลาคว่ำลง

sm.tm

ตัวอย่างที่ 4 จงหาสมการของพาราโบลา จากสิ่งที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

(1) จุดยอดอยู่ที่ (-2, 3) และจุดโฟกัสอยู่ที่ (1, 3)

วิธีทำ จากโจทย์ จุดยอดอยู่ที่ V(-2, 3) = V(h, k) จะได้ h = - 2 , k = 3

จุดโฟกัสอยู่ที่ F(1, 3) = F(h + c, k) จะได้ h + c = 1 ซึ่ง - 2 + c = 1 $\therefore$ c = 3

แกนพาราโบลาขนานกับ X คือ เส้นตรง y = 3 (Θ y = k)

ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง x = -5 (Θ x = h - c = - 2 - 3 = - 5)

เป็นกราฟพาราโบลาเปิดทางขวา (Θ c $>$ 0)

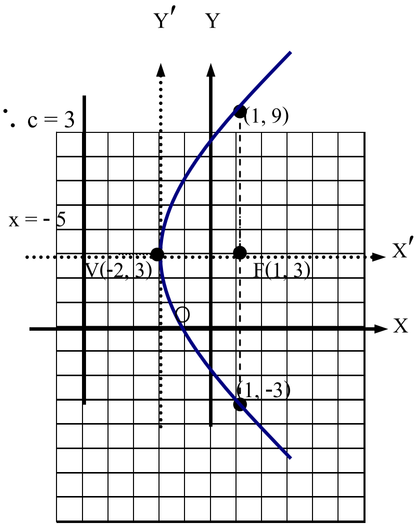
ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ | 4(3) | = 12 หน่วย

สมการอยู่ในรูป $(y - k)^2 = 4c(x - h)$

จะได้ สมการ $(y - 3)^2 = 4(3)(x + 2)$

$y^2 - 6y + 9 = 12x + 24$

$y^2 - 6y - 12x - 15 = 0$



(2) จุดยอดอยู่ที่ (-3, -4) และไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง x = 2

วิธีทำ จากโจทย์ จุดยอดอยู่ที่ V(-3, -4) = V(h, k) จะได้ h = - 3, k = -4

ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง x = 2 จะได้ h - c = 2 ดังนั้น - 3 - c = 2 $\therefore$ c = -5

แกนพาราโบลาขนานกับแกน X คือ เส้นตรง y = - 4 (Θ y = k)

เป็นกราฟพาราโบลาเปิดทางซ้าย (Θ c $<$ 0)

จุดโฟกัสอยู่ที่ F(h + c, k) = F(-3 - 5, - 4) = F(-8, -4)

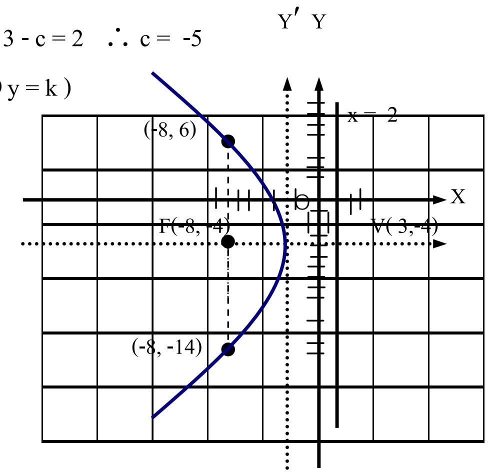
ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ | 4(-5) | = 20 หน่วย

สมการอยู่ในรูป $(y - k)^2 = 4c(x - h)$

จะได้ สมการ $(y + 4)^2 = 4(-5)(x + 3)$

$y^2 + 8y + 16 = -20x - 60$

$y^2 + 8y + 20x + 76 = 0$



(3) ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง x = 5 และ จุดโฟกัสอยู่ที่ (2, 4)

วิธีทำ จากโจทย์ ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง x = 5 และ จุดโฟกัสอยู่ที่ (2, 4)

เนื่องจากจุดโฟกัสอยู่ทางซ้ายของไดเรกตริกซ์ แสดงว่าเป็นกราฟพาราโบลาเปิดทางซ้าย

และจุดโฟกัส F(2, 4) = F(h + c, k) จะได้ h + c = 2 และ k = 4

และไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง x = h - c = 5 จะได้ h - c = 5

จาก h + c = 2 และ h - c = 5 จะได้ h = $\frac{7}{2}$ และ c = $-\frac{3}{2}$

แกนพาราโบลาขนานกับแกน X คือ เส้นตรง y = 4 (Θ y = k)

จุดยอดอยู่ที่ $(\frac{7}{2}, 4)$

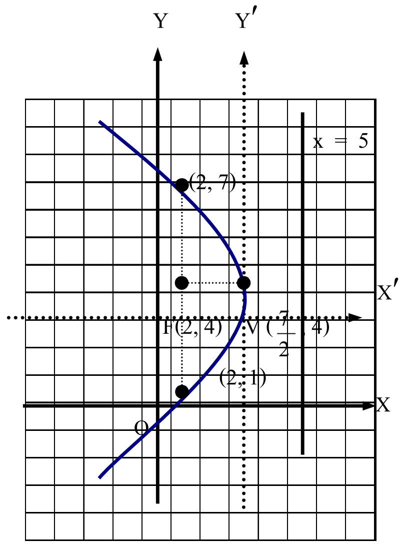
ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $| 4(-\frac{3}{2}) | = 6$ หน่วย

สมการอยู่ในรูป $(y - k)^2 = 4c(x - h)$

จะได้ สมการ $(y - 4)^2 = 4(-\frac{3}{2})(x - \frac{7}{2})$

$y^2 - 8y + 16 = - 6x + 21$

$y^2 - 8y + 6x - 5 = 0$



ตัวอย่างที่ 5 จงหาสมการของพาราโบลา จากสิ่งที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

(1) จุดยอดอยู่ที่ (-2, 3) และจุดโฟกัสอยู่ที่ (-2, 7)

วิธีทำ จากโจทย์ จุดยอดอยู่ที่ V(-2, 3) = V(h, k) จะได้ $h = -2$, $k = 3$

จุดโฟกัสอยู่ที่ F(-2, 7) = F(h, k + c) จะได้ $k + c = 7$ ซึ่ง $-3 + c = 7$ $\therefore$ $c = 4$

แกนพาราโบลาขนานกับ Y คือ เส้นตรง $x = -2$ ($\Theta\ x = h$)

ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $y = -1$ ($\Theta\ y = k - c = 3 - 4 = -1$)

เป็นกราฟพาราโบลาหงายขึ้น ($\Theta\ c > 0$)

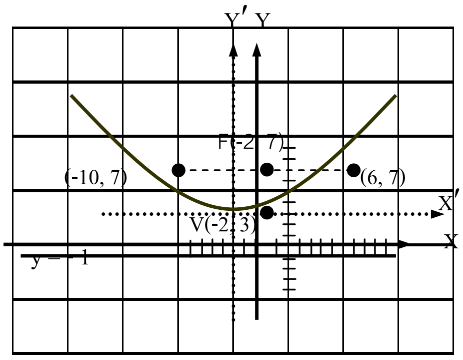
ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $|4(4)| = 16$ หน่วย

สมการอยู่ในรูป $(x - h)^2 = 4c(y - k)$

จะได้ สมการ $(x + 2)^2 = 4(4)(y - 3)$

$$x^2 + 4x + 4 = 16y - 48$$

$$x^2 + 4x - 16y + 52 = 0$$



(2) จุดยอดอยู่ที่ (2, 3) และไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $y = 8$

วิธีทำ จากโจทย์ จุดยอดอยู่ที่ V(2, 3) = V(h, k) จะได้ $h = 2$, $k = 3$

ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $y = 8$ จะได้ $k - c = 8$ ดังนั้น $3 - 8 = 2$ $\therefore$ $c = -5$

แกนพาราโบลาขนานกับแกน Y คือ เส้นตรง $x = 2$ ($\Theta\ x = h$)

เป็นกราฟพาราโบลาคว่ำลง ($\Theta\ c < 0$)

จุดโฟกัสอยู่ที่ F(h , k + c) = F(2, 3 - 5) = F(2, -2)

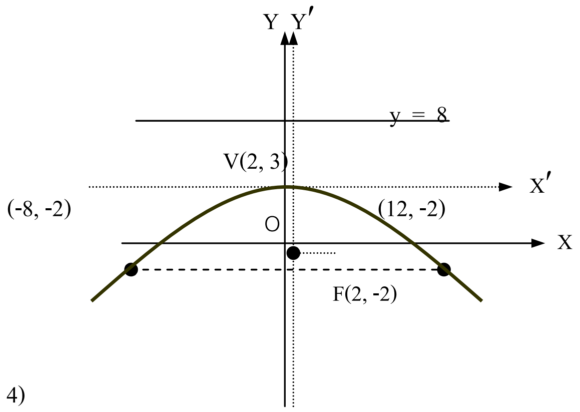
ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $|4(-5)| = 20$ หน่วย

สมการอยู่ในรูป $(x - h)^2 = 4c(y - k)$

จะได้ สมการ $(x - 2)^2 = 4(-5)(y - 3)$

$$x^2 - 4x + 4 = -20y + 60$$

$$x^2 - 4x + 20y - 56 = 0$$



(3) ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $y = -5$ และ จุดโฟกัสอยู่ที่ (2, 4)

วิธีทำ จากโจทย์ ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $y = -5$ และ จุดโฟกัสอยู่ที่ (2, 4)

เนื่องจากไดเรกตริกซ์ อยู่ข้างล่างจุดโฟกัสแสดงว่าเป็นกราฟพาราโบลาหงายขึ้น

และจุดโฟกัส F(2, 4) = F(h , k + c) จะได้ $h = 2$ และ $k + c = 4$

และไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $y = k - c = -5$ จะได้ $k - c = -5$

จาก $k + c = 4$ และ $k - c = -5$ จะได้ $k = -\frac{1}{2}$ และ $c = \frac{9}{2}$

แกนพาราโบลาขนานกับแกน Y คือ เส้นตรง $x = 2$ ($\Theta\ x = h$)

จุดยอดอยู่ที่ $(2, -\frac{1}{2})$

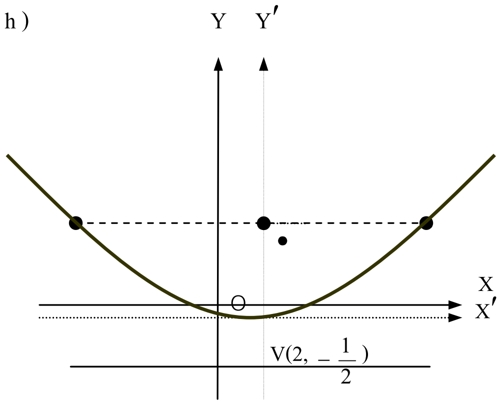
ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $|4(\frac{9}{2})| = 18$ หน่วย

สมการอยู่ในรูป $(x - h)^2 = 4c(y - k)$

จะได้ สมการ $(x - 2)^2 = 4(\frac{9}{2})(y + \frac{1}{2})$

$$x^2 - 4x + 4 = 18y + 9$$

$$x^2 - 4x - 18y - 5 = 0$$



(4) จุดยอดอยู่ที่ (4, -3) แกนของพาราโบลาคือ เส้นตรง $x = 4$ และลาตัสเรกตัมยาว 8 หน่วย

วิธีทำ จากโจทย์ จุดยอดอยู่ที่ $V(4, -3) = V(h, k)$ จะได้ $h = 4$ และ $k = -3$

และลาตัสเรกตัมยาว 8 หน่วย จะได้ $|4c| = 8 \quad \therefore c = \pm 2$

แกนพาราโบลาขนานกับแกน Y คือ เส้นตรง $x = 4$

สมการอยู่ในรูป $(x - h)^2 = 4c(y - k)$

จะได้ สมการ $(x - 4)^2 = 4(2)(y + 3)$

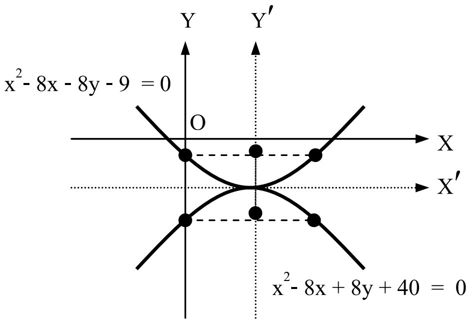
$x^2 - 8x + 16 = 8y + 24$

$x^2 - 8x - 8y - 9 = 0$

หรือ สมการ $x - 4)^2 = 4(-2)(y + 3)$

$x^2 - 8x + 16 = -8y - 24$

$x^2 - 8x + 8y + 40 = 0$



ดังนั้น สมการที่ต้องการคือ $x^2 - 8x - 8y - 9 = 0$ หรือ $x^2 - 8x + 8y + 40 = 0$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาจุดยอด โฟกัส ไดเรกตริกซ์ แกนพาราโบลา ความยาวของลาตัสเรกตัม พร้อมทั้งเขียนกราฟ จากสมการพาราโบลาในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) $y^2 - 6y - 20x + 109 = 0$

วิธีทำ จากสมการ $y^2 - 6y - 20x + 109 = 0$

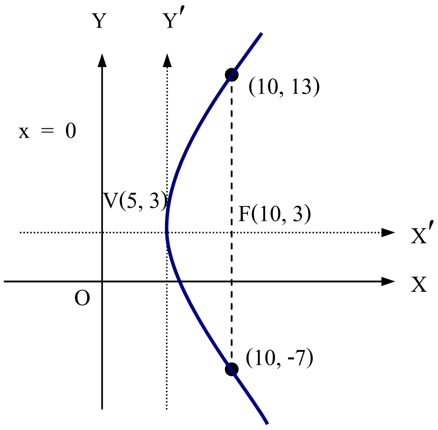
จะได้ $y^2 - 6y = 20x - 109$

$y^2 - 6y + 9 = 20x - 109 + 9$

$y^2 - 6y + 9 = 20x - 100$

$(y - 3)^2 = 20(x - 5)$

$(y - 3)^2 = 4(5)(x - 5)$



ดังนั้น จุดยอดอยู่ที่ $V(h, k) = V(5, 3)$ จะได้ $h = 5$ และ $k = 3$

แกนพาราโบลาขนานกับแกน X คือ เส้นตรง $y = 3$ $(\Theta\ y = k)$

$c = 5$ เป็นกราฟพาราโบลาเปิดทางขวา จุดโฟกัสอยู่ที่ $F(h + c, k) = F(5 + 5, 3) = F(10, 3)$

ไดเรกตริกซ์คือ เส้นตรง $x = 0$ คือ แกน Y $(\Theta\ x = h - c = 5 - 5 = 0)$

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $|4(5)| = 20$ หน่วย

(2) $y^2 - 2y + 6x + 19 = 0$

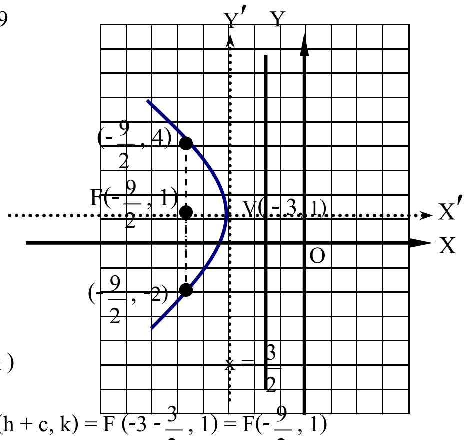
วิธีทำ จากสมการ $y^2 - 2y + 6x + 19 = 0$ จะได้ $y^2 - 2y = -6x - 19$

$y^2 - 2y + 1 = -6x - 19 + 1$

$y^2 - 2y + 1 = -6x - 18$

$(y - 1)^2 = -6(x + 3)$

$(y - 1)^2 = 4(-\frac{3}{2})(x + 3)$



ดังนั้น จุดยอดอยู่ที่ $V(h, k) = V(-3, 1)$ จะได้ $h = -3$ และ $k = 1$

แกนพาราโบลาขนานกับแกน X คือ เส้นตรง $y = 1$ $(\Theta\ y = k)$

$c = -\frac{3}{2}$ เป็นกราฟพาราโบลาเปิดทางซ้าย จุดโฟกัสอยู่ที่ $F(h + c, k) = F(-3 - \frac{3}{2}, 1) = F(-\frac{9}{2}, 1)$

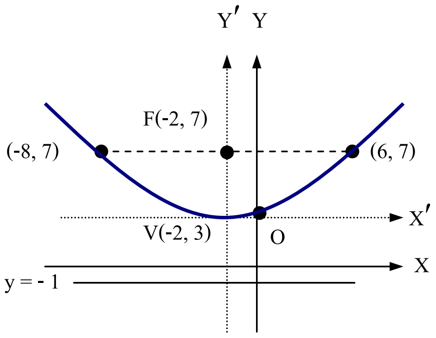
ไดเรกตริกซ์คือ เส้นตรง $x = -\frac{3}{2}$ $(\Theta\ x = h - c = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2})$

ลาตัสเรกตัมยาว $|4(-\frac{3}{2})| = 6$ หน่วย

sm.tm

ตัวอย่างที่ 7 จงหาจุดยอด โฟกัส ไดเรกตริกซ์ แกนพาราโบลา ความยาวของลาตัสเรกตัม พร้อมทั้งเขียนกราฟ จากสมการพาราโบลาในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) $x^2 + 4x - 16y + 52 = 0$



วิธีทำ จากสมการ $x^2 + 4x - 16y + 52 = 0$

จะได้ $x^2 + 4x = 16y - 52$

$$x^2 + 4x + 4 = 16y - 52 + 4$$

$$x^2 + 4x + 4 = 16y - 48$$

$$(x + 2)^2 = 4(4)(y - 3)$$

ดังนั้น จุดยอดอยู่ที่ $V(h, k) = V(-2, 3)$ จะได้ $h = -2$, $k = 3$

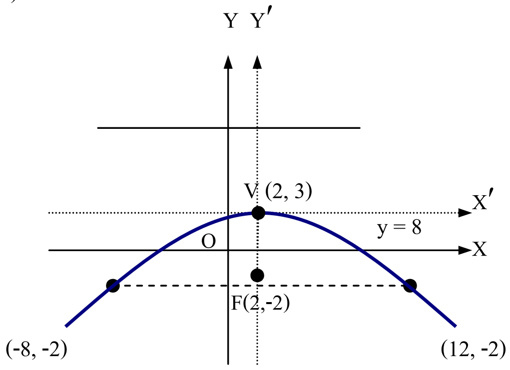
แกนพาราโบลาขนานกับ Y คือ เส้นตรง $x = -2$ $(\Theta\ x = h)$

$c = 4$ เป็นกราฟพาราโบลาหงายขึ้น จุดโฟกัสอยู่ที่ $F(h, k + c) = F(-2, 3 + 4) = F(-2, 7)$

ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $y = -1$ $(\Theta\ y = k - c = 3 - 4 = -1)$

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $|4(4)| = 16$ หน่วย

(2) $x^2 - 4x + 20y - 56 = 0$



วิธีทำ จากสมการ $x^2 - 4x + 20y - 56 = 0$

จะได้ $x^2 - 4x = -20y + 56$

$$x^2 - 4x + 4 = -20y + 56 + 4$$

$$x^2 - 4x + 4 = -20y + 60$$

$$(x - 2)^2 = 4(-5)(y - 3)$$

ดังนั้น จุดยอดอยู่ที่ $V(h, k) = V(2, 3)$ จะได้ $h = 2$, $k = 3$

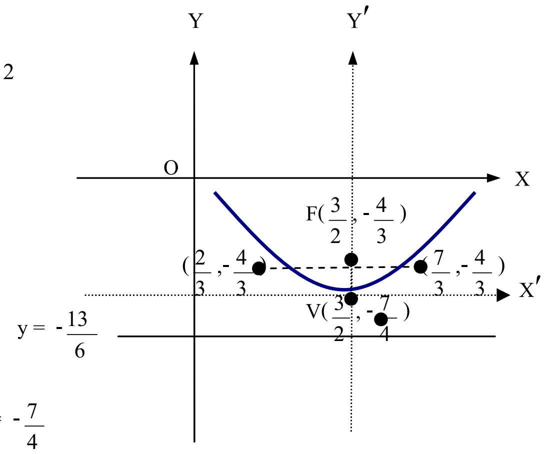
แกนพาราโบลาขนานกับแกน Y คือ เส้นตรง $x = 2$ $(\Theta\ x = h)$

$c = -5$ เป็นกราฟพาราโบลาคว่ำลง จุดโฟกัสอยู่ที่ $F(h, k + c) = F(2, 3 - 5) = F(2, -2)$

ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $y = 8$ $(\therefore\ y = k - c = 3 - (-5) = 8$

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $|4(-5)| = 20$ หน่วย

(3) $3x^2 - 9x - 5y - 2 = 0$



วิธีทำ จากสมการ $3x^2 - 9x - 5y - 2 = 0$ จะได้ $3x^2 - 9x = 5y + 2$

$$x^2 - 3x = \frac{5}{3}y + \frac{2}{3}$$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{5}{3}y + \frac{2}{3} + \frac{9}{4}$$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{5}{3}y + \frac{35}{12}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{3}\left(y + \frac{7}{4}\right)$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 4\left(\frac{5}{12}\right)\left(y + \frac{7}{4}\right)$$

ดังนั้น จุดยอดอยู่ที่ $V(h, k) = V\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}\right)$ จะได้ $h = \frac{3}{2}$, $k = -\frac{7}{4}$

แกนพาราโบลาขนานกับแกน Y คือ เส้นตรง $x = \frac{3}{2}$ $(\Theta\ x = h)$

$c = \frac{5}{12}$ เป็นกราฟพาราโบลาหงายขึ้น จุดโฟกัสอยู่ที่ $F(h, k + c) = F\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{4} + \frac{5}{12}\right) = F\left(\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}\right)$

ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $y = -\frac{13}{6}$ $\left(\Theta\ y = k - c = -\frac{7}{4} - \frac{5}{12} = -\frac{26}{12} = -\frac{13}{6}\right)$

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\left|4\left(\frac{5}{12}\right)\right| = \frac{5}{3}$ หน่วย

sm.tm

ใบงานที่ 1.9

1. จงหาสมการของพาราโบลา จากสิ่งที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟด้วย

(1) จุดยอดอยู่ที่ (0, 0) และโฟกัสอยู่ที่จุด (6, 0)

(2) จุดยอดอยู่ที่ (0, 0) และโฟกัสอยู่ที่จุด (0, -3)

(3) ไดเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง $x = 3$ และจุดยอดอยู่ที่จุด (0, 0)

(4) ไดเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง $y = -4$ และจุดยอดอยู่ที่ (0, 0)

sm.tm

(5) ไดเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง $x = 3$ และโฟกัสอยู่ที่จุด $(-3, 0)$

(6) ไดเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง $y = 4$ และโฟกัสอยู่ที่จุด $(0, -4)$

(7) ไดเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง $x = -\frac{3}{2}$ และโฟกัสอยู่ที่จุด $(\frac{3}{2}, 0)$

(8) ไดเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง $y = \frac{3}{4}$ และโฟกัสอยู่ที่จุด $(0, -\frac{3}{4})$

sm.tm

(9) จุดยอดอยู่ที่ (0, 0) มีแกน X เป็นแกนสมมาตร และกราฟผ่านจุด (-1, -2)

(10) จุดยอดอยู่ที่ (0, 0) มีโฟกัสอยู่บนแกน Y และกราฟผ่านจุด (1, 5)

(11) จุดยอดอยู่ที่ (0, 0) โฟกัสอยู่บนแกน X และลาตัสเรกตัมยาว 12 หน่วย

(12) จุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด แกนพาราโบลาอยู่บนเส้นตรง $y = 0$ และระยะระหว่างโฟกัสกับไดเรกตริกซ์เท่ากับ 8 หน่วย

sm.tm

2. จงหาจุดยอด โฟกัส ไดเรกตริกซ์ แกนพาราโบลา ความยาวของลาตัสเรกตัม พร้อมทั้งเขียนกราฟ จากสมการพาราโบลาในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) $y^2 = 4x$

(2) $y^2 = -8x$

(3) $x^2 = 18y$

(4) $x^2 = -12y$

sm.tm

(5) $y^2 + 5x = 0$

(6) $2y^2 - 5x = 0$

(7) $5x^2 + 4y = 0$

(8) $10y - 3x^2 = 0$

sm.tm

3. จงหาสมการของพาราโบลา จากสิ่งที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟด้วย

(1) จุดยอดอยู่ที่ (1, 2) และโฟกัสอยู่ที่จุด (5, 2)

(2) จุดยอดอยู่ที่ (-2, -1) และโฟกัสอยู่ที่จุด (-2, 5)

(3) ไดเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง $x = 1$ และจุดยอดอยู่ที่ (-2, 3)

(4) ไดเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง $y = -4$ และจุดยอดอยู่ที่ (3, -9)

sm.tm

(5) ไดเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง $y = -3$ และโฟกัสอยู่ที่ (1, 3)

(6) ไดเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง $x = 1$ และโฟกัสอยู่ที่จุด (9, 3)

(7) ไดเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง $x = 2$ และโฟกัสอยู่ที่จุด (-5, -4)

(8) ไดเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง $y = 6$ และโฟกัสอยู่ที่จุด (2, -2)

sm.tm

4. จงหาสมการของพาราโบลา จากสิ่งที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

(1) จุดยอดอยู่ที่ (-3, 4) และกราฟผ่านจุด (2, -1)

(2) ลาตัสเรกตัม มีจุดปลายอยู่ที่จุด (-2, 2) และ (-2, 4)

(3) กราฟผ่านจุด (3, 3), (6, 5) และ (6, -3) แกนของพาราโบลาขนานกับแกน X

(4) มีจุดยอดอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ ลาตัสเรกตัมยาว 12 หน่วยแกนของพาราโบลาขนานกับแกน Y

sm.tm

5. จงหาจุดยอด โฟกัส ไดเรกตริกซ์ แกนพาราโบลา ความยาวของลาตัสเรกตัม พร้อมทั้งเขียนกราฟ จากสมการพาราโบลาในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) $y^2 - 2y - 16x + 33 = 0$

(2) $y^2 + 4y + 12x - 32 = 0$

(3) $x^2 + 6x + 8y + 1 = 0$

(4) $x^2 + 6x - 20y + 49 = 0$

sm.tm

(5) $y^2 + 3y - 6x + 33 = 0$

(6) $x^2 + 10y + 5y + 30 = 0$

(7) $3x^2 + 6x + 8y + 4 = 0$

(8) $4y^2 - 4x - 32y + 17 = 0$

sm.tm

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10

เรื่อง **ภาคตัดกรวย (วงรี)** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 7 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. บอกความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงรีเมื่อกำหนดส่วนต่างๆ ของวงรีให้ได้
2. เขียนกราฟและหาส่วนต่างๆ ของวงรีเมื่อกำหนดความสัมพันธ์ของกราฟวงรีให้ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกบทนิยามของวงรีได้
2. บอกส่วนประกอบต่างๆ ของวงรีได้
3. บอกความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) โฟกัสอยู่บนแกน X ที่จุด (c, 0) และ (-c, 0) พร้อมทั้งเขียนกราฟได้
4. บอกความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) โฟกัสอยู่บนแกน Y ที่จุด (0, c) และ (0, -c) พร้อมทั้งเขียนกราฟได้
5. บอกความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k) แกนเอกขนานกับแกน X พร้อมทั้งเขียนกราฟได้
6. บอกความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k) แกนเอกขนานกับแกนY พร้อมทั้งเขียนกราฟได้
7. หาส่วนต่างๆ ของสมการวงรีที่กำหนดให้ได้

2. แนวความคิดหลัก (สาระสำคัญ)

บทนิยาม วงรี คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดบนระนาบมีค่าคงตัวและค่าคงตัวนี้มากกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ทั้งสองนั้น **จุดคงที่สองจุด** นี้เรียกว่า **จุดโฟกัส**

ส่วนประกอบของวงรี

1. จุดคงที่สองจุด เรียกว่า**โฟกัส**ของวงรี
2. จุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสอง เรียกว่า**จุดศูนย์กลาง**ของวงรี
3. จุดที่เส้นตรงที่ลากผ่านโฟกัสทั้งสองตัดกับวงรี เรียกว่า **จุดยอด**ของวงรี
4. ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดยอดทั้งสองของวงรี เรียกว่า **แกนเอก**(major axis) ของวงรี
5. ส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนเอกที่จุดศูนย์กลาง และมีจุดปลายทั้งสองอยู่บนวงรี เรียกว่า **แกนโท** (minor axis) ของวงรี
6. ส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนเอกที่จุดโฟกัส และมีจุดปลายทั้งสองอยู่บนวงรีเรียกว่า **ลาตัสเรกตัม** ของวงรี

3. เนื้อหาสาระ

1. บทนิยามของวงรี
2. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงรี โดยที่

2.1 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) แกนเอกอยู่บนแกน X โฟกัสอยู่ที่จุด (c, 0) และ (-c, 0) จุดยอดอยู่ที่จุด(a, 0) และ (-a, 0) จะมีสมการเป็น $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ เมื่อ $a > b > 0$ และ $b^2 = a^2 - c^2$

2.2 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) แกนเอกอยู่บนแกน Y โฟกัสอยู่ที่จุด (0, c) และ (0, -c) จุดยอดอยู่ที่จุด(0, a) และ (0, -a) จะมีสมการเป็น $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ เมื่อ $a > b > 0$ และ $b^2 = a^2 - c^2$

2.3 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) แกนเอกขนานกับแกน X โฟกัสอยู่ที่จุด (h + c, k) และ (h - c,) จุดยอดอยู่ที่จุด(h + a, k) และ (h - a, k) จะมีสมการเป็น $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

เมื่อ $a > b > 0$ และ $b^2 = a^2 - c^2$

2.4 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) แกนเอกขนานกับแกน Y โฟกัสอยู่ที่จุด (h, k + c) และ (h, k - c) จุดยอดอยู่ที่จุด(h, k + a) และ (h, k - a) จะมีสมการเป็น $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

เมื่อ $a > b > 0$ และ $b^2 = a^2 - c^2$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ให้นักเรียนทบทวนความรู้เกี่ยวกับการเขียนกราฟ การเลื่อนแกนทางขนาน และกราฟพาราโบลา
2. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้ที่ 1.10 แล้วสรุปบทนิยามของวงรี
3. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้ที่ 1.10 แล้วบอกส่วนประกอบของวงรี
4. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้แล้วบอกความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงรี มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) แกนเอกอยู่บนแกน X โฟกัสอยู่ที่จุด (c, 0) และ (-c, 0) จุดยอดอยู่ที่จุด(a, 0) และ (-a, 0) พร้อมทั้งเขียนกราฟ
5. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้แล้วบอกความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงรี มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) แกนเอกอยู่บนแกน Y โฟกัสอยู่ที่จุด (0, c) และ (0, -c) จุดยอดอยู่ที่จุด(0, a) และ (0, -a) พร้อมทั้งเขียนกราฟ
6. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้แล้วบอกความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงรี มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) แกนเอกขนานกับแกน X โฟกัสอยู่ที่จุด (h + c, k) และ (h - c, k) จุดยอดอยู่ที่จุด(h + a, k) และ (h - a, k) พร้อมทั้งเขียนกราฟ
7. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้แล้วบอกความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงรี มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) แกนเอกขนานกับแกน Y โฟกัสอยู่ที่จุด (h, k + c) และ (h, k - c) จุดยอดอยู่ที่จุด(h, k + a) และ (h, k - a)
8. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้แล้วจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนโท ความยาวลาตัสเรกตัม พร้อมทั้งเขียนกราฟ
9. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 1.10

5. แหล่งการการเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 1.10
2. ใบงานที่ 1.10
3. หนังสือ
4. แผ่นใส

6. กระบวนการวัดผลประเมินผล

สิ่งที่วัดผล	วิธีวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
1. ด้านความรู้	1. ตรวจใบงาน 2. ทดสอบ	1. ใบงานที่ 1.10 2. แบบทดสอบ	1. ทำถูกอย่างน้อย 95 % 2. ทำถูกอย่างน้อย 95 %
2. ด้านทักษะ	สังเกตจากการบอกหรือการสรุป	แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 90 %
3. ด้านคุณลักษณะ	สังเกต	แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 90 %

7. บันทึกหลังสอน

………..
………..
………..
………..
………..
………..

8. กิจกรรมเสนอแนะ

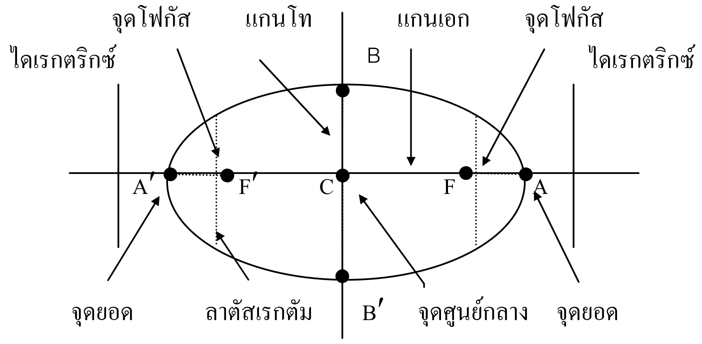
………..
………..
………..
………..
………..
………..

ใบความรู้ที่ 1.10 (ภาคตัดกรวย(วงรี))

วงรี (Ellipse)

บทนิยาม วงรี คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดบนระนาบมีค่าคงตัวและค่าคงตัวนี้มากกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ทั้งสองนั้น

ลักษณะของวงรี

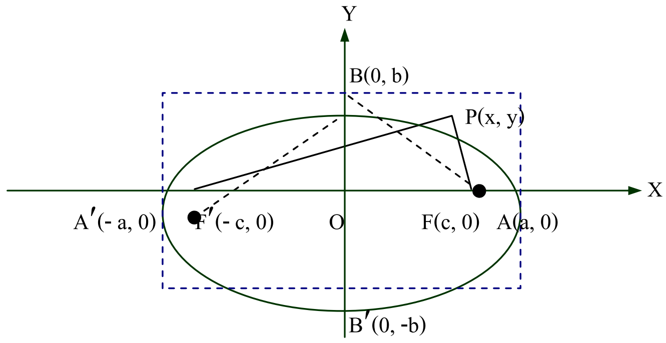


ส่วนประกอบของวงรี

1. จุดคงที่สองจุด คือ จุด F และ F′ เป็น**โฟกัส**ของวงรี
2. จุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสอง คือ จุด C เป็น**จุดศูนย์กลาง**ของวงรี
3. จุดที่เส้นตรงที่ลากผ่านโฟกัสทั้งสองตัดกับวงรี คือจุด A และ A′ เป็น**จุดยอด**ของวงรี
4. ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดยอดทั้งสองของวงรี คือ AA′ เรียกว่า **แกนเอก**(major axis) ของวงรี
5. ส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนเอกที่จุดศูนย์กลาง และมีจุดปลายทั้งสองอยู่บนวงรี คือ BB′ เรียกว่า **แกนโท**(minor axis) ของวงรี
6. ส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนเอกที่จุดโฟกัส และมีจุดปลายทั้งสองอยู่บนวงรีเรียกว่า**ลาตัสเรกตัม**ของวงรี

สมการของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0)

1. โฟกัสอยู่บนแกน X ที่จุด F(c, 0) และ F′(- c, 0) เมื่อ $c > 0$ ดังรูป



จากรูป

ให้ P(x, y) เป็นจุดใดๆ บนวงรี ระยะห่างระหว่างจุดโฟกัสทั้งสอง = FF′ = 2c หน่วย

จากบทนิยาม จะได้ PF + PF′ เท่ากับค่าคงตัว ซึ่งมากกว่า 2c **สมมุติให้** PF + PF′ = 2a เมื่อ $a > 0$ และ $2a > 2c$

จะได้ $$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้ $$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$4cx-4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

นำ -4 มาหารทั้งสองข้าง จะได้ $$a^2-cx = a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้ $$a^4-2a^2cx+c^2x^2 = a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$$

$$a^4-2a^2cx+c^2x^2 = a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2 = a^4-a^2c^2$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

sm.tm

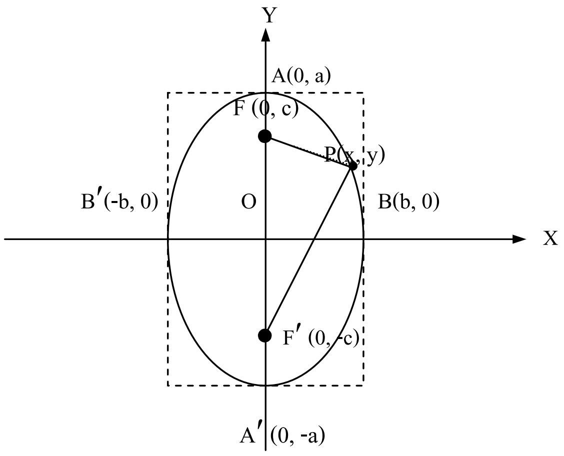
ถ้าเลื่อนจุด P(x, y) มาอยู่ที่จุด B(0, b) แล้ว ΔPOF เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และ PF = a จะได้ $b^2 = a^2 - c^2$

แทนค่า $a^2 - c^2$ ด้วย b^2 จะได้ $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

นำ a^2b^2 มาหารทั้งสองข้าง จะได้สมการวงรี $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ โดยที่ $a > b > 0$ และ $b^2 = a^2 - c^2$

1. แกนเอกอยู่บนแกน X
2. จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0)
3. จุด A(a, 0) และ $A'(-a, 0)$ เป็นจุดยอดของวงรี และ เรียก AA' ว่าแกนเอก ซึ่ง AA' ยาว 2a หน่วย $(a > 0)$
4. จุด B(0, b) และ $B'(0, -b)$ เป็นจุดปลายแกนโทของวงรี เรียก BB' ว่าแกนโท ซึ่ง BB' ยาว 2b หน่วย $(b > 0)$
5. จุด F(c, 0) และ $F'(-c, 0)$ เป็นโฟกัสของวงรี ซึ่ง FF' ยาว 2c หน่วย $(c > 0)$
6. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$ หน่วย
7. ค่าความเยื้องศูนย์(eccentricity) หรือ $e = \frac{c}{a}$
8. สมการไดเรกตริกซ์ คือ $x = \pm\frac{a}{e}$ หรือ $x = \pm\frac{a^2}{c}$

2. โฟกัสอยู่บนแกน Y ที่จุด F(0, c) และ $F'(0, -c)$ เมื่อ $c > 0$ ดังรูป



จากรูป

ให้ P(x, y) เป็นจุดใดๆ บนวงรี ระยะห่างระหว่างจุดโฟกัสทั้งสอง = FF' = 2c หน่วย

จากบทนิยาม จะได้ $PF + PF'$ เท่ากับค่าคงตัว ซึ่งมากกว่า 2c

สมมุติให้ $PF + PF' = 2a$ เมื่อ $a > 0$ และ $2a > 2c$

ในทำนองเดียวกัน จะได้สมการวงรี $\boxed{\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1}$ หรือ $\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$ โดยที่ $a > b > 0$ และ $b^2 = a^2 - c^2$

1. แกนเอกอยู่บนแกน Y
2. จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0)
3. จุด A(0, a) และ $A'(0, -a)$ เป็นจุดยอดของวงรี และ เรียก AA' ว่าแกนเอก ซึ่ง AA' ยาว 2a หน่วย $(a > 0)$
4. จุด B(b, 0) และ $B'(-b, 0)$ เป็นจุดปลายแกนโทของวงรี เรียก BB' ว่าแกนโท ซึ่ง BB' ยาว 2b หน่วย $(b > 0)$
5. จุด F(0, c) และ $F'(0, -c)$ เป็นโฟกัสของวงรี ซึ่ง FF' ยาว 2c หน่วย $(c > 0)$
6. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$ หน่วย
7. ค่าความเยื้องศูนย์ของวงรี (eccentricity) หรือ $e = \frac{c}{a}$
8. สมการไดเรกตริกซ์ คือ $y = \pm\frac{a}{e}$ หรือ $y = \pm\frac{a^2}{c}$

หมายเหตุ เส้นประรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ไม่ได้เป็นส่วนใดส่วนหนึ่งของกราฟแต่เขียนเพื่อบอกขอบเขต
ของวงรีเท่านั้น กราฟของวงรีจะอยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้

sm.tm

ตัวอย่างที่ 1 จากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงหาสมการวงรี

(1) โฟกัสอยู่ที่จุด (3, 0) และ (-3, 0) และผลบวกของระยะจากจุดใดๆไปยังโฟกัสทั้งสอง(ผลบวกค่าคงตัว)เท่ากับ 8 หน่วย

วิธีทำ จากโฟกัสอยู่ที่จุด (3, 0) และ (-3, 0) จะได้จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) และ $c = 3$

ผลบวกค่าคงตัวเท่ากับ 8 หน่วย จะได้ $2a = 8 \therefore a = 4$

จะได้จุดยอดอยู่ที่จุด (4, 0) และ (-4, 0)

จาก $b^2 = a^2 - c^2$ จะได้ $b^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7 \therefore b = \sqrt{7}$

จุดปลายแกนโทอยู่ที่จุด $(0, \sqrt{7})$ และ $(0, -\sqrt{7})$

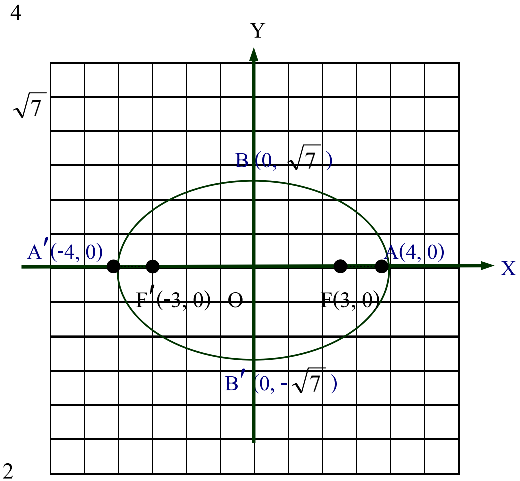
ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(7)}{4} = \frac{7}{2}$ หน่วย

แกนเอกอยู่บนแกน X

สมการอยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

จะได้สมการ $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{7})^2} = 1$

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ หรือ $7x^2 + 16y^2 = 112$



(2) โฟกัสอยู่ที่จุด (0, 4) และ (0, -4) และผลบวกของระยะจากจุดใดๆไปยังโฟกัสทั้งสอง(ผลบวกค่าคงตัว)เท่ากับ 10 หน่วย

วิธีทำ จาก โฟกัสอยู่ที่จุด (0, 4) และ (0, -4) จะได้จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) และ $c = 4$

ผลบวกค่าคงตัวเท่ากับ 10 หน่วย จะได้ $2a = 10 \therefore a = 5$

จะได้จุดยอดอยู่ที่จุด (0, 5) และ (0, -5)

จาก $b^2 = a^2 - c^2$ จะได้ $b^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \therefore b = 3$

จุดปลายแกนโทอยู่ที่จุด (3, 0) และ (- 3, 0)

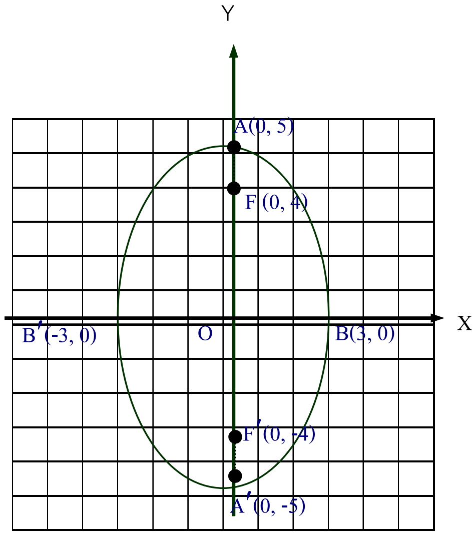
ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(9)}{5} = \frac{18}{5}$ หน่วย

แกนเอกอยู่บนแกน Y

สมการอยู่ในรูป $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

จะได้สมการ $\frac{y^2}{5^2} + \frac{x^2}{3^2} = 1$

$\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$ หรือ $25x^2 + 9y^2 = 225$



(3) จุดยอดอยู่ที่จุด (5, 0) และ (-5, 0) โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (2, 0)

วิธีทำ จาก จุดยอดอยู่ที่จุด (5, 0) และ (-5, 0) จะได้จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) และ $a = 5$

โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (2, 0) จะได้ $c = 2$ และ โฟกัสอีกจุดหนึ่งอยู่ที่ (-2, 0)

จาก $b^2 = a^2 - c^2$ จะได้ $b^2 = 5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21 \therefore b = \sqrt{21}$

จุดปลายแกนโทอยู่ที่จุด $(0, \sqrt{21})$ และ $(0, -\sqrt{21})$

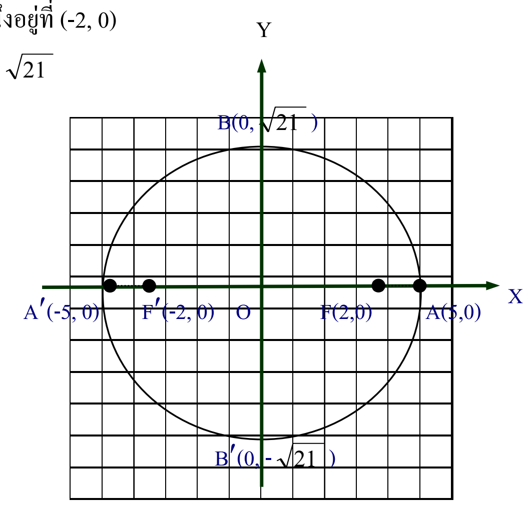
ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(21)}{5} = \frac{42}{5}$ หน่วย

แกนเอกอยู่บนแกน X

สมการอยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

จะได้สมการ $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{21})^2} = 1$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$ หรือ $21x^2 + 25y^2 = 525$



sm.tm

(4) โฟกัสอยู่ที่จุด (3, 0) และ (-3, 0) แกนเอกยาว 8 หน่วย

วิธีทำ จากโฟกัสอยู่ที่จุด (3, 0) และ (-3, 0) จะได้จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) และ $c = 3$

และแกนเอกยาว 8 หน่วย จะได้ $2a = 8 \therefore a = 4$ จะได้จุดยอดอยู่ที่จุด (4, 0) และ (-4, 0)

จาก $b^2 = a^2 - c^2$ จะได้ $b^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7 \therefore b = \sqrt{7}$

จุดปลายแกนโทอยู่ที่จุด $(0, \sqrt{7})$ และ $(0, -\sqrt{7})$

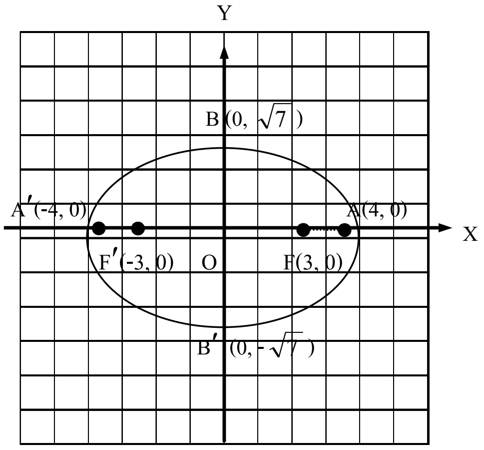
ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(7)}{4} = \frac{7}{2}$ หน่วย

แกนเอกอยู่บนแกน X

สมการอยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

จะได้สมการ $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{7})^2} = 1$

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ หรือ $7x^2 + 16y^2 = 112$



(5) จุดยอดอยู่ที่จุด (0, 6) และ (0, -6) และกราฟผ่านจุด $(2, \sqrt{14})$

วิธีทำ จาก จุดยอดอยู่ที่จุด (0, 6) และ (0, -6) จะได้จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) และ $a = 6$ แกนเอกอยู่บนแกน Y

จะได้สมการอยู่ในรูป $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

เนื่องจาก $a = 6$ และกราฟผ่านจุด $(2, \sqrt{14})$ จะได้ $\frac{(\sqrt{14})^2}{6^2} + \frac{2^2}{b^2} = 1$

$$\frac{14}{36} + \frac{4}{b^2} = 1$$

$$\frac{4}{b^2} = 1 - \frac{14}{36} = \frac{22}{36}$$

$$b^2 = 4\left(\frac{36}{22}\right) \therefore b^2 = \frac{72}{11}$$

ดังนั้น จะได้สมการวงรีคือ $\frac{y^2}{36} + \frac{11x^2}{72} = 1$ หรือ $11x^2 + 2y^2 = 72$

(6) จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด แกนเอกอยู่บนแกน X และกราฟผ่านจุด (4, 3) กับจุด (6, 2)

วิธีทำ เนื่องจากจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด แกนเอกอยู่บนแกน X จะได้สมการอยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

กราฟผ่านจุด (4, 3) จะได้ $\frac{4^2}{a^2} + \frac{3^2}{b^2} = 1$

$\frac{16}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1$ ....(1)

กราฟผ่านจุด (6, 2) จะได้ $\frac{6^2}{a^2} + \frac{2^2}{b^2} = 1$

$\frac{36}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$ ....(2)

(1) $\times 4$ จะได้ $\frac{64}{a^2} + \frac{36}{b^2} = 4$ ....(3)

(2) $\times 9$ จะได้ $\frac{324}{a^2} + \frac{36}{b^2} = 9$ ....(4)

(4) - (3) จะได้ $\frac{260}{a^2} = 5 \quad \therefore a^2 = 52$

แทนค่า a^2 ด้วย 52 ลงในสมการ (1) จะได้ $\frac{16}{52} + \frac{9}{b^2} = 1$ และ $\frac{9}{b^2} = 1 - \frac{16}{52} = \frac{36}{52} = \frac{9}{13}$

$$\therefore b^2 = 9 \times \frac{13}{9} = 13$$

ดังนั้น จะได้สมการวงรีคือ $\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{13} = 1$ หรือ $x^2 + 4y^2 = 52$

ตัวอย่างที่ 2 จากสมการวงรีในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนโท ความยาวลาตัสเรกตัม

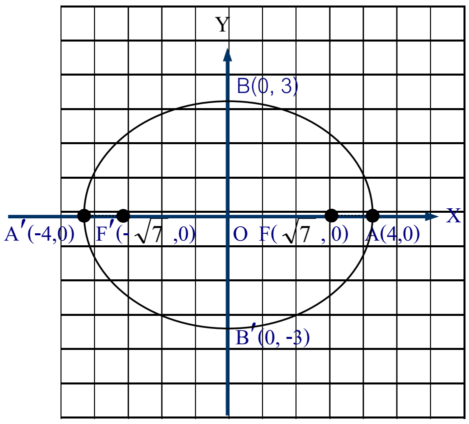
(1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

วิธีทำ จากสมการ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ จะได้ $a^2=16\ \therefore\ a=4$ และ $b^2=9\ \therefore\ b=3$

เนื่องจาก $b^2=a^2-c^2$ หรือ $c^2=a^2-b^2$ จะได้ $c^2=16-9=7\ \therefore\ c=\sqrt{7}$

แกนเอกอยู่บนแกน X

1. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0)
2. จุดยอดอยู่ที่ (4, 0) และ (-4, 0)
3. จุดโฟกัสอยู่ที่ $(\sqrt{7}, 0)$ และ $(-\sqrt{7}, 0)$
4. จุดปลายแกนโทอยู่ที่ (0, 3) และ (0, -3)
5. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a}=\frac{2(9)}{4}=\frac{9}{2}$ หน่วย



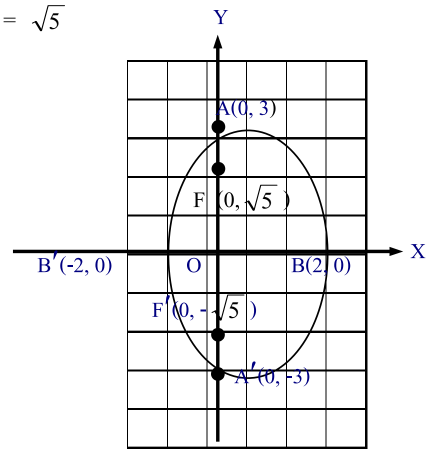
(2) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

วิธีทำ จากสมการ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ จะได้ $a^2=9\ \therefore\ a=3$ และ $b^2=4\ \therefore\ b=2$

เนื่องจาก $b^2=a^2-c^2$ หรือ $c^2=a^2-b^2$ จะได้ $c^2=9-4=5\ \therefore\ c=\sqrt{5}$

แกนเอกอยู่บนแกน Y

1. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0)
2. จุดยอดอยู่ที่ (0, 3) และ (0, -3)
3. จุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, \sqrt{5})$ และ $(0, -\sqrt{5})$
4. จุดปลายแกนโทอยู่ที่ (2, 0) และ (-2, 0)
5. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a}=\frac{2(4)}{3}=\frac{8}{3}$ หน่วย



(3) $3x^2+y^2=3$

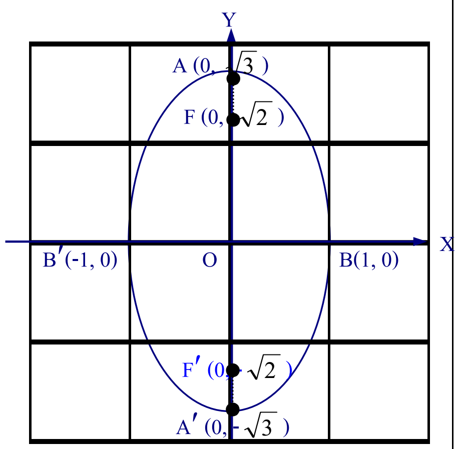
วิธีทำ จากสมการ $3x^2+y^2=3$ หรือ $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{3}=1$

จะได้ $a^2=3\ \therefore\ a=\sqrt{3}$ และ $b^2=1\ \therefore\ b=1$

เนื่องจาก $b^2=a^2-c^2$ หรือ $c^2=a^2-b^2$ จะได้ $c^2=3-1=2\ \therefore\ c=\sqrt{2}$

แกนเอกอยู่บนแกน Y

1. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0)
2. จุดยอดอยู่ที่ $(0, \sqrt{3})$ และ $(0, -\sqrt{3})$
3. จุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, \sqrt{2})$ และ $(0, -\sqrt{2})$
4. จุดปลายแกนโทอยู่ที่ (1, 0) และ (-1, 0)
5. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a}=\frac{2(1)^2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ หน่วย



(4) $4x^2 + 5y^2 = 100$

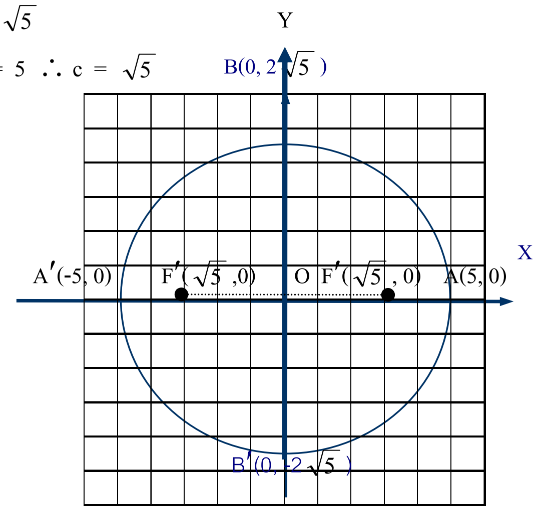
วิธีทำ จากสมการ $4x^2 + 5y^2 = 100$ หรือ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{20} = 1$

จะได้ $a^2 = 25$ $\therefore$ $a = 5$ และ $b^2 = 20$ $\therefore$ $b = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

เนื่องจาก $b^2 = a^2 - c^2$ หรือ $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้ $c^2 = 25 - 20 = 5$ $\therefore$ $c = \sqrt{5}$

แกนเอกอยู่บนแกน X

1. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0)
2. จุดยอดอยู่ที่ (5, 0) และ (-5, 0)
3. จุดโฟกัสอยู่ที่ ($\sqrt{5}$, 0) และ (-$\sqrt{5}$, 0)
4. จุดปลายแกนโทอยู่ที่ (0, 2$\sqrt{5}$) และ (0, -2$\sqrt{5}$)
5. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(20)}{4} = 10$ หน่วย



(5) $9x^2 + 2y^2 = 18$

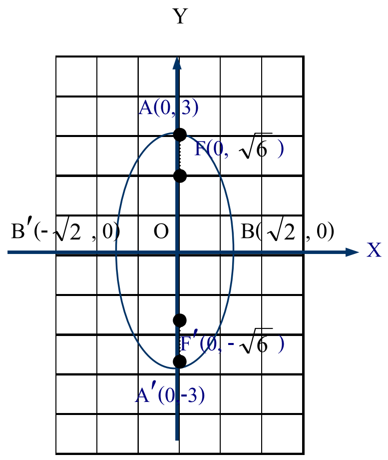
วิธีทำ จากสมการ $9x^2 + 2y^2 = 18$ หรือ $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} = 1$

จะได้ $a^2 = 9$ $\therefore$ $a = 3$ และ $b^2 = 2$ $\therefore$ $b = \sqrt{2}$

เนื่องจาก $b^2 = a^2 - c^2$ หรือ $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้ $c^2 = 9 - 2 = 6$ $\therefore$ $c = \sqrt{6}$

แกนเอกอยู่บนแกน Y

1. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0)
2. จุดยอดอยู่ที่ (0, 3) และ (0, -3)
3. จุดโฟกัสอยู่ที่ (0, $\sqrt{6}$) และ (0, -$\sqrt{6}$)
4. จุดปลายแกนโทอยู่ที่ ($\sqrt{2}$, 0) และ (-$\sqrt{2}$, 0)
5. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(2)}{3} = \frac{4}{3}$ หน่วย



(6) $x^2 + 4y^2 = 16$

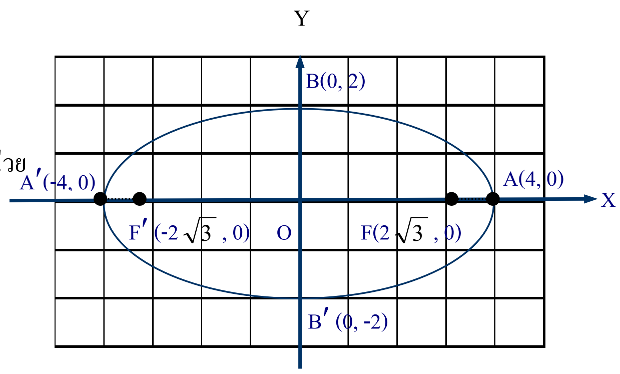
วิธีทำ จากสมการ $x^2 + 4y = 16$ หรือ $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

จะได้ $a^2 = 16$ $\therefore$ $a = 4$ และ $b^2 = 4$ $\therefore$ $b = 2$

เนื่องจาก $b^2 = a^2 - c^2$ หรือ $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้ $c^2 = 16 - 4 = 12$ $\therefore$ $c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

แกนเอกอยู่บนแกน X

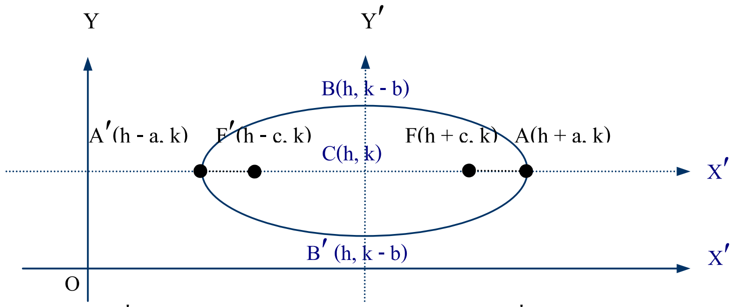
1. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0)
2. จุดยอดอยู่ที่ (4, 0) และ (-4, 0)
3. จุดโฟกัสอยู่ที่ (2$\sqrt{3}$, 0) และ (-2$\sqrt{3}$, 0)
4. จุดปลายแกนโทอยู่ที่ (0, 2) และ (0, -2)
5. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(2)^2}{4} = 2$ หน่วย



สมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k)

1. สมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) แกนเอกขนานกับแกน X

F(h, k+ c)



กำหนด สมการวงรีมีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) แกนเอกขนานกับแกน X โดยการเลื่อนแกนทางขนานไปอยู่ที่จุด (h, k)

ดังนั้น สมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่คือ $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$

เนื่องจาก $x' = x - h$ และ $y' = y - k$

ดังนั้น สมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) เมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิมคือ

$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$ โดยที่ $a > b > 0$ และ $b^2 = a^2 - c^2$

(1) แกนเอกขนานกับแกน X อยู่บนเส้นตรง $y = k$

(2) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k)

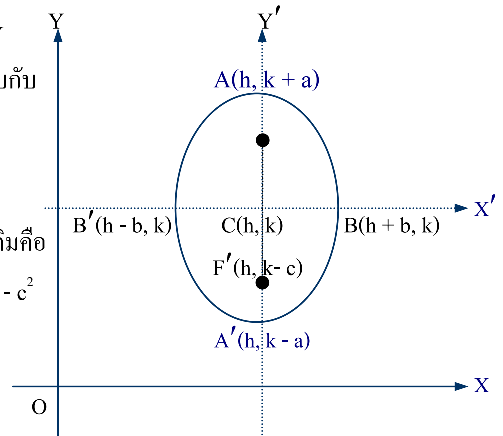
(3) จุด F(h + c, k) และ F′(h - c, k) เป็นโฟกัสของวงรี ซึ่ง FF′ ยาว 2c หน่วย $(c > 0)$

(4) จุด A(h + a, k) และ A′(h - a, k) เป็นจุดยอดของวงรี และ เรียก AA′ ว่า**แกนเอก** ซึ่ง AA′ ยาว 2a หน่วย $(a > 0)$

(5) จุด B(h, k + b) และ B′(h, k - b) เป็นจุดปลายแกนโทของวงรี เรียก BB′ ว่า**แกนโท** ซึ่ง BB′ ยาว 2b หน่วย $(b > 0)$

(6) ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$ หน่วย

2. สมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) แกนเอกขนานกับแกน Y



กำหนด สมการวงรีมีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) แกนเอกขนานกับแกน Y โดยการเลื่อนแกนทางขนานไปอยู่ที่จุด (h, k) จะได้สมการวงรีเทียบกับแกนพิกัดใหม่ คือ $\frac{(x')^2}{b^2} + \frac{(y')^2}{a^2} = 1$

เนื่องจาก $x' = x - h$ และ $y' = y - k$

ดังนั้น สมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) เมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิมคือ

$\boxed{\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1}$ โดยที่ $a > b > 0$ และ $b^2 = a^2 - c^2$

(1) แกนเอกขนานกับแกน Y อยู่บนเส้นตรง $x = h$

(2) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(h, k)

(3) จุด F(h , k + c) และ F′(h , k - c) เป็นโฟกัสของวงรี ซึ่ง FF′ ยาว 2c หน่วย $(c > 0)$

(4) จุด A(h , k + a) และ A′(h, k - a) เป็นจุดยอดของวงรี และ เรียก AA′ ว่าแกนเอก ซึ่ง AA′ ยาว 2a หน่วย $(a > 0)$

(5) จุด B(h + b, k) และ B′(h - b, k) เป็นจุดปลายแกนโทของวงรี เรียก BB′ ว่าแกนโท ซึ่ง BB′ ยาว 2b หน่วย $(b > 0)$

(6) ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$ หน่วย

หมายเหตุ
1. จุดศูนย์กลาง จะอยู่กึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสอง หรือระหว่างจุดยอดทั้งสอง หรือระหว่างจุดปลายของแกนโททั้งสอง
2. จุดศูนย์กลาง จุดโฟกัส จุดยอด อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน
3. ระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางกับจุดยอด จะเท่ากับ a หน่วย
4. ระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางกับโฟกัส จะเท่ากับ c หน่วย
5. ระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางกับจุดปลายแกนโท จะเท่ากับ b หน่วย

sm.tm

ตัวอย่างที่ 3 จงหาสมการวงรี จากสิ่งที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) โฟกัสอยู่ที่จุด(4, 2) และ (-2, 2) และผลบวกคงตัวเท่ากับ 8 หน่วย

วิธีทำ จาก โฟกัสอยู่ที่จุด(4, 2) และ (-2, 2) จะได้ จุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสองคือ (1, 2)

จะได้จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (1, 2) จะได้ $h = 1,\ k = 2$ และผลบวกคงตัวเท่ากับ 8 หน่วย จะได้ $2a = 8 \therefore a = 4$

ระยะระหว่างจุด (1, 2) กับจุด (4, 2) เท่ากับ 3 หน่วย $\therefore\ c = 3$

จาก $b^2 = a^2 - c^2$ จะได้ $b^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7 \therefore b = \sqrt{7}$ แกนเอกขนานกับแกน X อยู่บนเส้นตรง $y = 2$

สมการอยู่ในรูป $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

จะได้สมการวงรี คือ $\dfrac{(x-1)^2}{4^2} + \dfrac{(y-2)^2}{(\sqrt{7})^2} = 1$

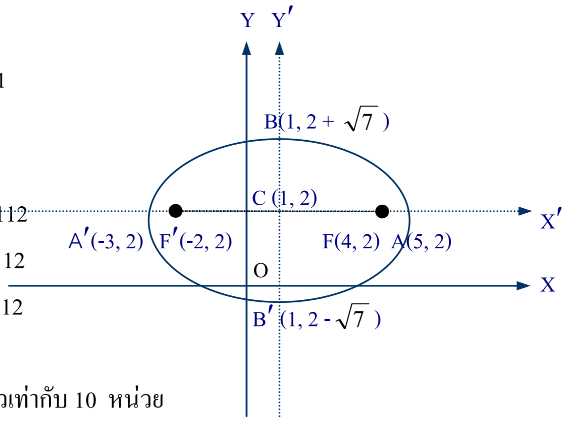
$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{7} = 1$$

$$7(x-1)^2 + 16(y-2)^2 = 112$$

$$7(x^2 - 2x + 1) + 16(y^2 - 4y + 4) = 112$$

$$7x^2 - 14x + 7 + 16y^2 - 64y + 64 = 112$$

$$7x^2 + 16y^2 - 14x - 64y - 41 = 0$$



(2) โฟกัสอยู่ที่จุด(-2, -1) และ (-2, 3) และผลบวกคงตัวเท่ากับ 10 หน่วย

วิธีทำ จาก โฟกัสอยู่ที่จุด(-2, -1) และ (-2, 3) จะได้ จุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสองคือ (-2, 1)

จะได้จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (-2, 1) จะได้ $h = -2,\ k = 1$ และผลบวกคงตัวเท่ากับ 10 หน่วย จะได้ $2a = 10 \therefore a = 5$

ระยะระหว่างจุด (-2, 1) กับจุด (-2, 3) เท่ากับ 2 หน่วย $\therefore\ c = 2$

จาก $b^2 = a^2 - c^2$ จะได้ $b^2 = 5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21 \therefore b = \sqrt{21}$

แกนเอกขนานกับแกน Y อยู่บนเส้นตรง $x = -2$

สมการอยู่ในรูป $\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

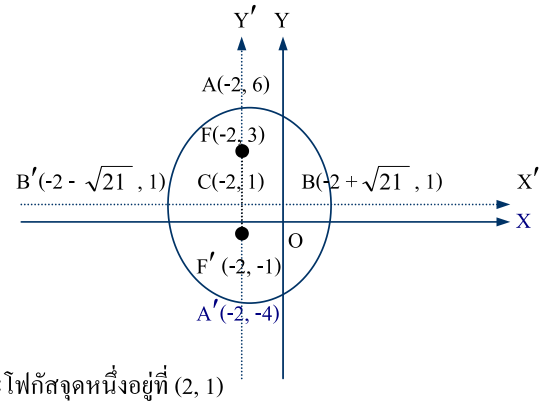
จะได้ สมการวงรี คือ $\dfrac{(x+2)^2}{21} + \dfrac{(y-1)^2}{25} = 1$

$$25(x+2)^2 + 21(y-1)^2 = 525$$

$$25(x^2 + 4x + 4) + 21(y^2 - 2y + 1) = 525$$

$$25x^2 + 100x + 100 + 21y^2 - 42y + 21 = 525$$

$$25x^2 + 21y^2 + 100x - 42y - 404 = 0$$



(3) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (2, -3) และจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (2, 2) และโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (2, 1)

วิธีทำ จากจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (2, -3) จะได้ $h = 2,\ k = -3$ และจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (2, 2)

จะได้แกนเอกขนานกับแกน Y อยู่บนเส้นตรง $x = 2$

ระยะระหว่างจุด (2, -3) กับจุด (2, 2) เท่ากับ 5 หน่วย $\therefore\ a = 5$

ระยะระหว่างจุด (2, -3) กับจุด (2, 1) เท่ากับ 4 หน่วย $\therefore\ c = 4$

จาก $b^2 = a^2 - c^2$ จะได้ $b^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \therefore b = 3$

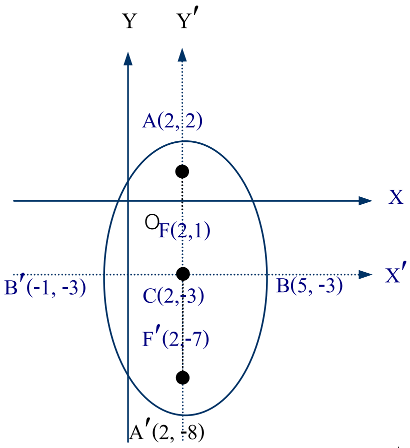
สมการอยู่ในรูป $\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

จะได้ สมการวงรี คือ $\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y+3)^2}{25} = 1$

$$25(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 + 6y + 9) = 225$$

$$25x^2 - 100x + 100 + 9y^2 + 54y + 81 = 225$$

$$25x^2 + 9y^2 - 100x + 54y - 44 = 0$$



sm.tm

(4) จุดยอดอยู่ที่ (-1, 3) และ (5, 3) แกนโทยาว 4 หน่วย

วิธีทำ จาก จุดอยู่ที่ (-1, 3) และ (5, 3) จะได้ จุดกึ่งกลางระหว่างจุดยอดทั้งสองคือ (2, 3)

จะได้จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (2, 3) $\therefore$ h = 2, k = 3 เนื่องจากแกนโทยาว 4 หน่วย จะได้ 2b = 4 $\therefore$ b = 2

และระยะระหว่างจุด (2, 3) กับจุด (5, 3) เท่ากับ 3 หน่วย $\therefore$ a = 3

จาก $b^2 = a^2 - c^2$ จะได้ $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$ $\therefore c = \sqrt{5}$ ซึ่งแกนเอกขนานกับแกน X อยู่บนเส้นตรง y = 3

สมการอยู่ในรูป $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

จะได้สมการวงรี คือ $\dfrac{(x-2)^2}{3^2} + \dfrac{(y-3)^2}{2^2} = 1$

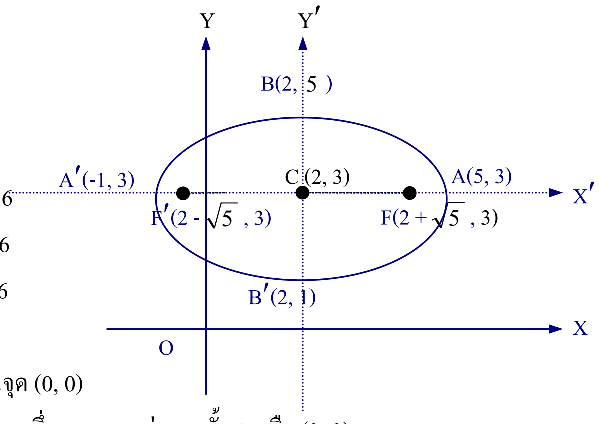
$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

$$4(x-2)^2 + 9(y-3)^2 = 36$$

$$4(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 6y + 9) = 36$$

$$4x^2 - 16x + 16 + 9y^2 - 54y + 81 = 36$$

$$4x^2 + 9y^2 - 16x - 54y + 61 = 0$$



(5) จุดปลายแกนเอกอยู่ที่ (3, 4) และ (3, -4) กราฟผ่านจุด (0, 0)

วิธีทำ จาก จุดปลายแกนเอกอยู่ที่ (3, 4) และ (3, -4) จะได้ จุดกึ่งกลางระหว่างจุดทั้งสองคือ (3, 0)

จะได้จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (3, 0) จะได้ h = 3 , k = 0 ระยะระหว่างจุด (3, 0) กับจุด (3, 4) เท่ากับ 4 หน่วย $\therefore$ a = 4

แกนเอกขนานกับแกน Y อยู่บนเส้นตรง x = 3

สมการอยู่ในรูป $\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ กราฟผ่านจุด (0, 0)

จะได้ $\dfrac{(0-3)^2}{b^2} + \dfrac{(0)^2}{4^2} = 1$ จะได้ $\dfrac{9}{b^2} = 1$ จะได้ $b^2 = 9$ $\therefore$ b = 3

จาก $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้ $c^2 = 16 - 9 = 7$ $\therefore c = \sqrt{7}$

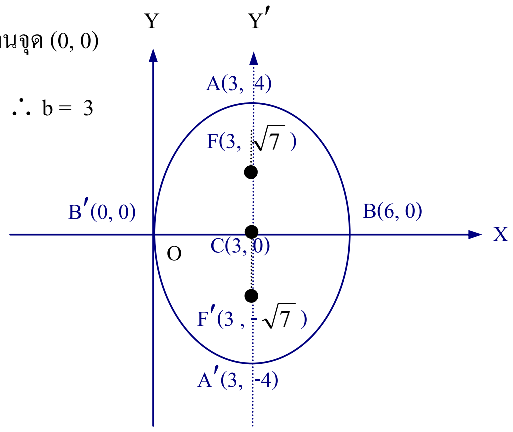
จะได้ สมการ $\dfrac{(x-3)^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

$$16(x-3)^2 + 9y^2 = 144$$

$$16(x^2 - 6x + 9) + 9y^2 = 144$$

$$16x^2 - 96x + 144 + 9y^2 = 144$$

$$16x^2 + 9y^2 - 96x = 0$$



(6) จุดปลายแกนโทอยู่ที่จุด (-1, 5) และ (-1, -1) และ จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (4, 2)

วิธีทำ จาก จุดปลายแกนโทอยู่ที่จุด (-1, 5) และ (-1, -1) จะได้ จุดกึ่งกลางระหว่างจุดทั้งสองคือ (-1, 2)

จะได้จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (-1, 2) จะได้ h = -1 , k = 2

จะได้แกนเอกขนานกับแกน X อยู่บนเส้นตรง y = 2

ระยะระหว่างจุด (-1, 2) กับจุด (4, 2) เท่ากับ 5 หน่วย $\therefore$ a = 5

ระยะระหว่างจุด (-1, 2) กับจุด (-1, 5) เท่ากับ 4 หน่วย $\therefore$ b = 3

จาก $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้ $c^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$ $\therefore$ c = 4

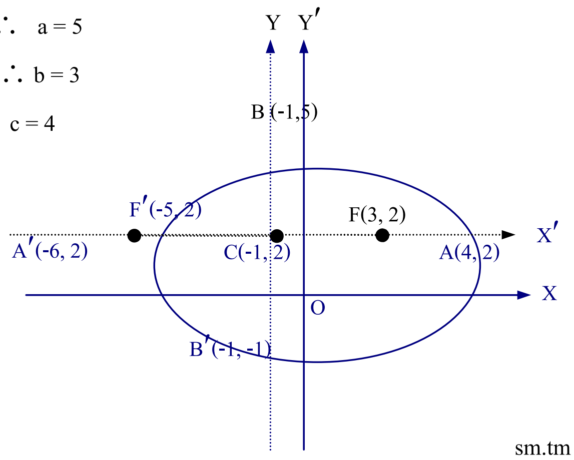
สมการอยู่ในรูป $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

จะได้ สมการวงรี คือ $\dfrac{(x+1)^2}{25} + \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$

$$9(x^2 + 2x + 1) + 25(y^2 - 4y + 4) = 225$$

$$9x^2 + 18x + 9 + 25y^2 - 100y + 100 = 225$$

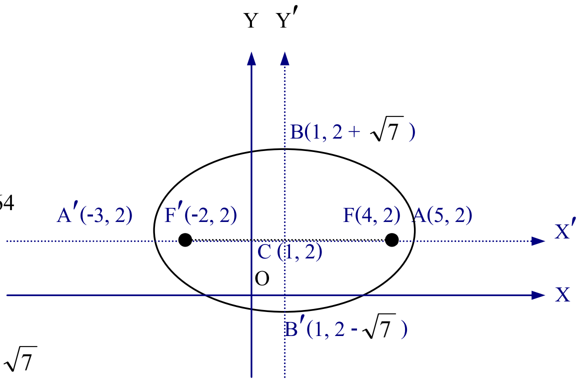
$$9x^2 + 25y^2 + 18x - 100y - 116 = 0$$



sm.tm

ตัวอย่างที่ 4 จากสมการวงรีในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนโท ความยาวลาตัสเรกตัม

1. $7x^2 + 16y^2 - 14x - 64y - 41 = 0$



วิธีทำ จาก $7x^2 + 16y^2 - 14x - 64y - 41 = 0$

จะได้ $(7x^2 - 14x) + (16y^2 - 64y) = 41$

$$7(x^2 - 2x) + 16(y^2 - 4y) = 41$$

$$7(x^2 - 2x + 1) + 16(y^2 - 4y + 4) = 41 + 7 + 64$$

$$7(x - 1)^2 + 16(y - 2)^2 = 112$$

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{7} = 1$$

จะได้ $a^2 = 16 \therefore a = 4$ และ $b^2 = 7 \therefore b = \sqrt{7}$

จาก $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้ $c^2 = 16 - 7 = 9 \therefore c = 3$

แกนเอกขนานกับแกน X อยู่บนเส้นตรง $y = 2$

(1) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(h, k) = C(1, 2)$ ซึ่ง $h = 1$ และ $k = 2$

(2) จุดโฟกัส $F(h + c, k) = F(1 + 3, 2) = F(4, 2)$

และ $F'(h - c, k) = F'(1 - 3, 2) = F'(-2, 2)$

(3) จุดยอดอยู่ที่ $A(h + a, k) = A(1 + 4, 2) = A(5, 2)$

และ $A'(h - a, k) = A'(1 - 4, 2) = A'(-3, 2)$

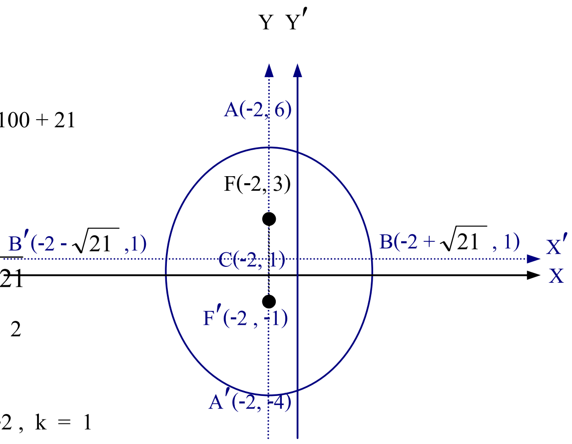
(4) จุดปลายแกนโท $B(h, k + b) = B(1, 2 + \sqrt{7})$

และ $B'(h, k - b) = B'(1, 2 - \sqrt{7})$

(5) ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(7)}{4} = \frac{7}{2}$ หน่วย

2. $25x^2 + 21y^2 + 100x - 42y - 404 = 0$

วิธีทำ จาก $25x^2 + 21y^2 + 100x - 42y - 404 = 0$



$$(25x^2 + 100x) + (21y^2 - 42y) = 404$$

$$25(x^2 + 4x) + 21(y^2 - 2y) = 404$$

$$25(x^2 + 4x + 4) + 21(y^2 - 2y + 1) = 404 + 100 + 21$$

$$25(x + 2)^2 + 21(y - 1)^2 = 525$$

$$\frac{(x+2)^2}{21} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$$

จะได้ $a^2 = 25 \therefore a = 5$ และ $b^2 = 21 \therefore b = \sqrt{21}$

จาก $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้ $c^2 = 25 - 21 = 4 \therefore c = 2$

แกนเอกขนานกับแกน Y อยู่บนเส้นตรง $x = -2$

(1) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(h, k) = C(-2, 1)$ ซึ่ง $h = -2$, $k = 1$

(2) จุดโฟกัสอยู่ที่ $F(h, k + c) = F(-2, 1 + 2) = F(-2, 3)$

และ $F'(h, k - c) = F'(-2, 1 - 2) = F'(-2, -1)$

(3) จุดยอดอยู่ที่ $A(h, k + a) = A(-2, 1 + 5) = A(-2, 6)$

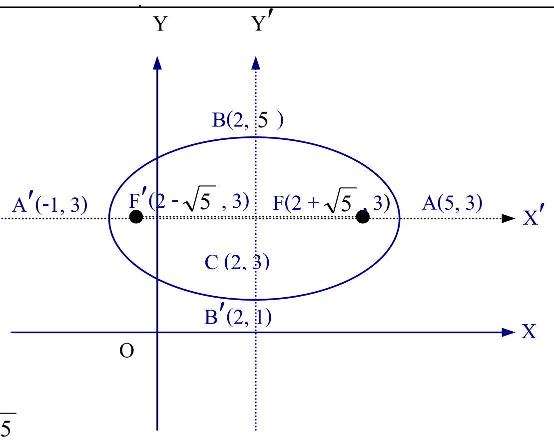
และ $A'(h, k - a) = A'(-2, 1 - 5) = A'(-2, -4)$

(4) จุดปลายแกนโทอยู่ที่ $B(h + b, k) = B(-2 + \sqrt{21}, 1)$

และ $B'(h - b, k) = B'(-2 - \sqrt{21}, 1)$

(5) ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(21)}{5} = \frac{42}{5}$ หน่วย

3. $4x^2 + 9y^2 - 16x - 54y + 61 = 0$



วิธีทำ จาก $4x^2 + 9y^2 - 16x - 54y + 61 = 0$

$$(4x^2 - 16x) + (9y^2 - 54y) = -61$$

$$4(x^2 - 4x) + 9(y^2 - 6y) = -61$$

$$4(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 6y + 9) = -61 + 16 + 81$$

$$4(x-2)^2 + 9(y-3)^2 = 36$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

จะได้ $a^2 = 9$ $\therefore a = 3$ และ $b^2 = 4$ $\therefore b = 2$

จาก $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้ $c^2 = 9 - 4 = 5$ $\therefore c = \sqrt{5}$

แกนเอกขนานกับแกน X อยู่บนเส้นตรง $y = 3$

(1) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(h, k) = C(2, 3)$ ซึ่ง $h = 2$ และ $k = 3$

(2) จุดโฟกัส $F(h + c, k) = F(2 + \sqrt{5}, 3)$

และ $F'(h - c, k) = F'(2 - \sqrt{5}, 3)$

(3) จุดยอดอยู่ที่ $A(h + a, k) = A(2 + 3, 3) = A(5, 3)$

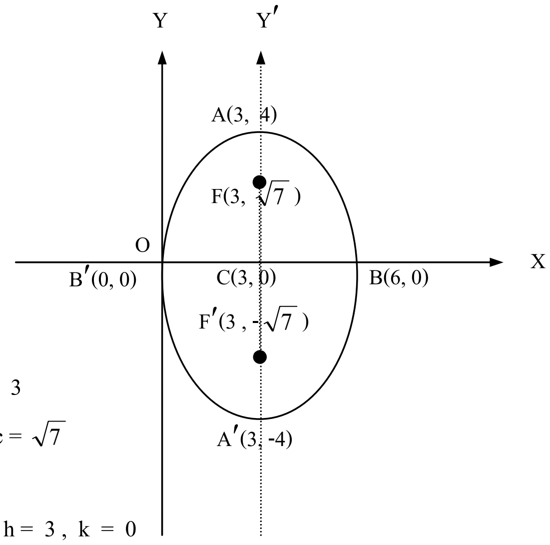
และ $A'(h - a, k) = A'(2 - 3, 3) = A'(-1, 3)$

(4) จุดปลายแกนโท $B(h, k + b) = B(2, 3 + 2) = B(2, 3 + 2)$

และ $B'(h, k - b) = B'(2, 3 - 2) = B'(2, -1)$

(5) ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)}{4} = 2$ หน่วย

4. $16x^2 + 9y^2 - 96x = 0$



วิธีทำ จาก $16x^2 + 9y^2 - 96x = 0$

จะได้ $(16x^2 - 96x) + 9y^2 = 0$

$$16(x^2 - 6x) + 9y^2 = 0$$

$$16(x^2 - 6x + 9) + 9y^2 = 144$$

$$16(x-3)^2 + 9y^2 = 144$$

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

จะได้ $a^2 = 16$ $\therefore a = 4$ และ $b^2 = 9$ $\therefore b = 3$

จาก $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้ $c^2 = 16 - 9 = 7$ $\therefore c = \sqrt{7}$

แกนเอกขนานกับแกน Y อยู่บนเส้นตรง $x = 3$

(1) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(h, k) = C(3, 0)$ จะได้ $h = 3$, $k = 0$

(2) จุดโฟกัสอยู่ที่ $F(h, k + c) = F(3, 0 + \sqrt{7}) = F(3, \sqrt{7})$

และ $F'(h, k - c) = F'(3, 0 - \sqrt{7}) = F'(3, -\sqrt{7})$

(3) จุดยอดอยู่ที่ $A(h, k + a) = A(3, 0 + 4) = A(3, 4)$

และ $A'(h, k - a) = A'(3, 0 - 4) = A'(3, -4)$

(4) จุดปลายแกนโทอยู่ที่ $B(h + b, k) = B(3 + 3, 0) = B(6, 0)$

และ $B'(h - b, k) = B'(3 - 3, 0) = B'(0, 0)$

(5) ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(9)}{4} = \frac{9}{2}$ หน่วย

ใบงานที่ 1.10

1. จงหาสมการวงรีจากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1) ระยะจากจุดใดๆบนวงรีไปยังจุด (-3, 0) และ (3, 0) เท่ากับ 8 หน่วย

(2) จุดโฟกัสอยู่ที่ (0, -4) และ (0, 4) และผลบวกคงตัวเท่ากับ 10 หน่วย

(3) จุดยอดอยู่ที่ (-10, 0) และ (10, 0) และจุดโฟกัสอยู่ที่ (-8, 0) และ (8, 0)

(4) จุดโฟกัสอยู่ที่ (0, -6) และ (0, 6) และแกนโทยาว 16 หน่วย

(5) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0) แกนเอกอยู่บนแกน Y ยาว 8 หน่วย และความยาวลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{9}{2}$ หน่วย

sm.tm

(6) จุดยอดอยู่ที่ (0, -6) และ (0, 6) และวงรีผ่านจุด (3, 2)

(7) จุดโฟกัสอยู่ที่ (-8, 0) และ (8, 0) และวงรีผ่านจุด $(8, \frac{18}{5})$

(8) จุดศูนย์กลางที่จุด (0, 0) จุดยอดจุหนึ่งอยู่ที่ (0, -5) และโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (0, -4)

(9) จุดศูนย์กลางที่จุด (0, 0) แกนเอกยาว 10 หน่วย และโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (-4, 0)

(10) จุดโฟกัสอยู่ที่ (0, -4) และ (0, 4) และ $e = \frac{2}{3}$

sm.tm

2. จากสมการวงรีในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนโท ความยาวลาตัสเรกตัมและเขียนกราฟ

(1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

(2) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

(3) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{12} = 1$

sm.tm

(4) $4x^2 + 9y^2 = 36$

(5) $x^2 + 4y^2 - 100 = 0$

(6) $5x^2 + 2y^2 - 4 = 0$

sm.tm

3. จงหาสมการวงรีจากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1) ผลบวกของระยะจากจุดใดๆ บนวงรีไปยังจุด (-3, 2) และ (3, 2) เท่ากับ 10 หน่วย

(2) ผลบวกของระยะจากจุดใดๆบนวงรีไปยังจุด (-1, -1) และ (7, -1) เท่ากับ 10 หน่วย

(3) ผลบวกของระยะจากจุดใดๆบนวงรีไปยังจุด (-2, -1) และ (-2, -5) เท่ากับ 8 หน่วย

sm.tm

(4) โฟกัสอยู่ที่จุด (6, 3) และ (-2, 3) ผลบวกคงตัวเท่ากับ 10 หน่วย

(5) จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (6, 3) โฟกัสอยู่ที่ (4, 3) และ (-4, 3)

(6) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (-4, 1) จุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (-4, -5) และแกนเอกยาว 14 หน่วย

(7) จุดปลายแกนโทอยู่ที่ (-5, 2) และ (1, 2) และจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (-2, 6)

(8) จุดยอดอยู่ที่ (-2, -7) และ (-2, 1) และจุดปลายแกนโทจุดหนึ่งอยู่ที่ (-5, -3)

(9) กราฟวงรีผ่านจุด (-2, 2), (2, 5), (6, 2) และจุด (2, -1)

4. จากสมการวงรีในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนโท ความยาวลาตัสเรกตัมและเขียนกราฟ

(1) $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$

(2) $25(x+3)^2 + 9(y+1)^2 - 225 = 0$

(3) $9x^2 + 16y^2 - 36x - 96y + 36 = 0$

sm.tm

(4) $25x^2 + 16y^2 + 50x + 64y - 311 = 0$

(5) $16x^2 + 20y^2 - 64x - 40y - 236 = 0$

(6) $25x^2 + 9y^2 + 100x + 18y - 116 = 0$

sm.tm

(7) $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y = 92$

(8) $9x^2 + 64y^2 + 54x + 128y = 431$

(9) $9x^2 + 5y^2 - 36x - 20y = 124$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11

เรื่อง **ภาคตัดกรวย (ไฮเพอร์โบลา)** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 7 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. บอกความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลาเมื่อกำหนดส่วนต่างๆ ของไฮเพอร์โบลาให้ได้
2. เขียนกราฟและหาส่วนต่างๆ ของไฮเพอร์โบลาเมื่อกำหนดความสัมพันธ์ของกราฟไฮเพอร์โบลาให้ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกบทนิยามของไฮเพอร์โบลาได้
2. บอกส่วนประกอบต่างๆ ของไฮเพอร์โบลาได้
3. บอกความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) โฟกัสอยู่บนแกน X ที่จุด (c, 0) และ (-c, 0) พร้อมทั้งเขียนกราฟได้
4. บอกความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) โฟกัสอยู่บนแกน Y ที่จุด (0, c) และ (0, -c) พร้อมทั้งเขียนกราฟได้
5. บอกความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k) แกนตามขวางขนานกับแกน X พร้อมทั้งเขียนกราฟได้
5. บอกความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k) แกนตามขวางขนานกับแกนY พร้อมทั้งเขียนกราฟได้
6. หาส่วนต่างๆ ของสมการไฮเพอร์โบลาที่กำหนดให้ได้

2. แนวความคิดหลัก (สาระสำคัญ)

บทนิยาม ไฮเพอร์โบลา คือเซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งผลต่างของระยะห่างจากจุดใดๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดบนระนาบมีค่าคงตัวซึ่งมากกว่าศูนย์ แต่น้อยกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ทั้งสอง **จุดคงที่สองจุด**นี้เรียกว่า **จุดโฟกัส**

ส่วนประกอบของไฮเพอร์โบลา

1. จุดคงที่สองจุด เรียกว่า **โฟกัส** ของไฮเพอร์โบลา
2. จุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสอง เรียกว่า**จุดศูนย์กลาง** ของไฮเพอร์โบลา
3. จุดที่ไฮเพอร์โบลาตัดกับเส้นตรงที่ผ่านโฟกัสทั้งสอง เรียกว่า **จุดยอด** ของไฮเพอร์โบลา
4. ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดยอดทั้งสองของไฮเพอร์โบลา เรียกว่า **แกนตามขวาง**
5. ส่วนของเส้นตรงผ่านจุดศูนย์กลางและตั้งฉากกับแกนตามขวาง เรียกว่า **แกนสังยุค**
6. **เส้นกำกับ** (asymptotes) ของไฮเพอร์โบลา

3. เนื้อหาสาระ

บทนิยามของไฮเพอร์โบลา

ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา โดยที่

3.1 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) แกนตามขวางอยู่บนแกน X โฟกัสอยู่ที่จุด (c, 0) และ (-c, 0) จุดยอดอยู่ที่จุด(a, 0) และ (-a, 0) จะมีสมการเป็น $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $c > a > 0$ และ $b^2 = c^2 - a^2$

3.2 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) แกนตามขวางอยู่บนแกน Y โฟกัสอยู่ที่จุด (0, c) และ (0, -c) จุดยอดอยู่ที่จุด(0, a) และ (0, -a) จะมีสมการเป็น $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $c > a > 0$ และ $b^2 = c^2 - a^2$

3.3 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) แกนตามขวางขนานกับแกน X โฟกัสอยู่ที่จุด (h + c, k) และ (h - c, k) จุดยอดอยู่ที่จุด(h + a, k) และ (h - a, k) จะมีสมการเป็น $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $c > a > 0$ และ $b^2 = c^2 - a^2$

3.4 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) แกนตามขวางขนานกับแกน Y โฟกัสอยู่ที่จุด (h, k + c) และ (h, k - c) จุดยอดอยู่ที่จุด(h, k + a) และ (h, k - a) จะมีสมการเป็น $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $c > a > 0$ และ $b^2 = c^2 - a^2$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ให้นักเรียนทบทวนความรู้เกี่ยวกับการเขียนกราฟ การเลื่อนแกนทางขนาน กราฟพาราโบลา กราฟวงรี
2. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้ที่ 1.11 แล้วสรุปบทนิยามของไฮเพอร์โบลา
3. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้ที่ 1.11 แล้วบอกส่วนประกอบของไฮเพอร์โบลา
4. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้แล้วบอกความสัมพันธ์ ซึ่งมีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) แกนตามขวางอยู่บนแกน X โฟกัสอยู่ที่จุด (c, 0) และ (-c, 0) จุดยอดอยู่ที่จุด (a, 0) และ (-a, 0) พร้อมทั้งเขียนกราฟ
5. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้แล้วบอกความสัมพันธ์ ซึ่งมีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) แกนตามขวางอยู่บนแกน Y โฟกัสอยู่ที่จุด (0, c) และ (0, -c) จุดยอดอยู่ที่จุด (0, a) และ (0, -a) พร้อมทั้งเขียนกราฟ
6. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้แล้วบอกความสัมพันธ์ ซึ่งมีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา มีจุดศูนย์กลาง อยู่ที่จุด (h, k) แกนตามขวางขนานกับแกน X โฟกัสอยู่ที่จุด (h + c, k) และ (h - c, k) จุดยอดอยู่ที่จุด (h + a, k) และ (h - a, k) พร้อมทั้งเขียนกราฟ
7. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้แล้วบอกความสัมพันธ์ ซึ่งมีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) แกนตามขวางขนานกับแกน Y โฟกัสอยู่ที่จุด (h, k + c) และ (h, k - c) จุดยอดอยู่ที่จุด(h, k + a) และ (h, k - a) พร้อมทั้งเขียนกราฟ
8. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้แล้วจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนสังยุค สมการเส้นกำกับความยาวลาตัสเรกตัม พร้อมทั้งเขียนกราฟ
9. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 1.11

5. แหล่งการการเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 1.11
2. ใบงานที่ 1.11
3. หนังสือ
4. แผ่นใส

6. กระบวนการวัดผลประเมินผล

สิ่งที่วัดผล	วิธีวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
1. ด้านความรู้	1. ตรวจใบงาน 2. ทดสอบ	1. ใบงานที่ 1.11 2. แบบทดสอบ	1. ทำถูกอย่างน้อย 95 % 2. ทำถูกอย่างน้อย 95 %
2. ด้านทักษะ	สังเกตจากการบอกหรือการสรุป	แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 90 %
3. ด้านคุณลักษณะ	สังเกต	แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 90 %

7. บันทึกหลังสอน

……..
……..
……..
……..
……..
……..
……..
……..

8. กิจกรรมเสนอแนะ

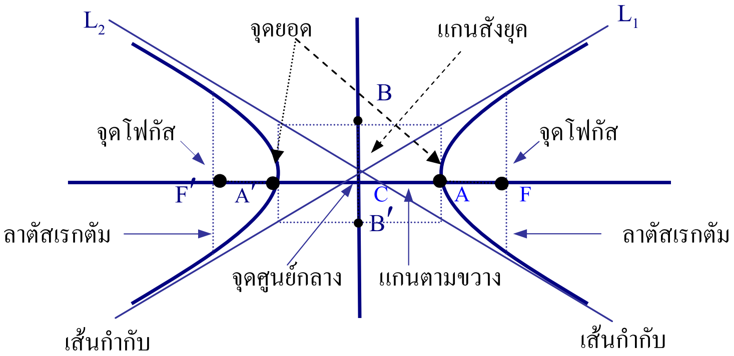
……..
……..
……..
……..
……..
……..
……..
……..

ใบความรู้ที่ 1.11 (ภาคตัดกรวย(ไฮเพอร์โบลา))

ไฮเพอร์โบลา(Hyperbola)

บทนิยาม ไฮเพอร์โบลา คือเซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งผลต่างของระยะห่างจากจุดใดๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดบนระนาบมีค่าคงตัวซึ่งมากกว่าศูนย์ แต่น้อยกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ทั้งสอง

ลักษณะของไฮเพอร์โบลา

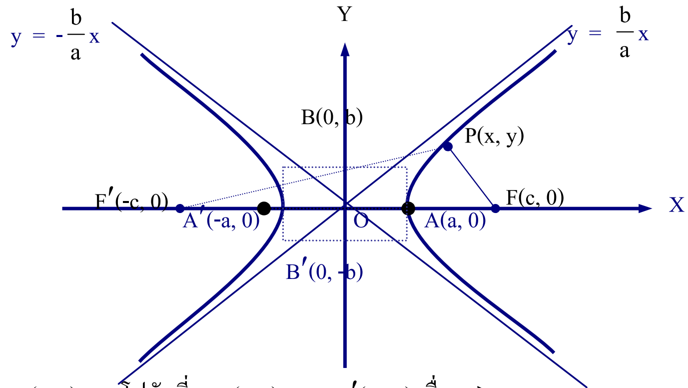


ส่วนประกอบของไฮเพอร์โบลา

1. จุดคงที่สองจุด คือ F และ F′ เป็น**โฟกัส**ของไฮเพอร์โบลา
2. จุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสอง คือ จุด C เป็น**จุดศูนย์กลาง**ของไฮเพอร์โบลา
3. จุดที่ไฮเพอร์โบลาตัดกับเส้นตรงที่ผ่านโฟกัสทั้งสอง คือ จุด A และ A′ เป็น**จุดยอด**ของไฮเพอร์โบลา
4. ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดยอดทั้งสองของไฮเพอร์โบลา คือ AA′ เรียกว่า **แกนตามขวาง** (transverse axis) ของไฮเพอร์โบลา
5. ส่วนของเส้นตรงผ่านจุดศูนย์กลางและตั้งฉากกับแกนตามขวาง คือ BB′ เรียกว่า **แกนสังยุค**(conjugate axis) ของไฮเพอร์โบลา
6. เส้นตรง L_1 และ L_2 เป็น**เส้นกำกับ** (asymptotes) ของไฮเพอร์โบลา

สมการของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่ (0, 0)

1. แกนตามขวางอยู่บนแกน X



กำหนด ไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางที่จุด (0, 0) และโฟกัสที่จุด F(c, 0) และ F′(-c, 0) เมื่อ $c > 0$

ให้ P(x, y) เป็นจุดใดๆบนไฮเพอร์โบลา และผลต่างระยะจากจุด P ไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 2a ซึ่ง $a > 0$

จากบทนิยาม จะได้ $|PF' - PF| = 2a$

จะได้ $\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = \pm 2a$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้ $(x+c)^2+y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2$

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

นำ 4 มาหารทั้งสองข้าง จะได้ $cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

sm.tm

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้ $\quad c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$(c^2x^2 - a^2x^2) - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = (c^2 - a^2)a^2$$

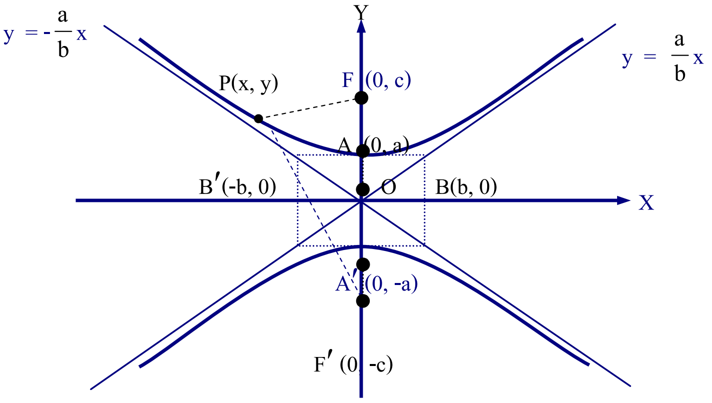
นำ $(c^2 - a^2)a^2$ มาหารทั้งสองข้าง จะได้ $\quad \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$

เนื่องจาก $0 < a < c$ ดังนั้น $c^2 - a^2 > 0$ ให้ $c^2 - a^2 = b^2$ เมื่อ $b > 0$

จะได้สมการไฮเพอร์โบลาคือ $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$ เมื่อ $b^2 = c^2 - a^2$

1. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(0, 0)
2. แกนตามขวางอยู่บนแกน X
3. จุดโฟกัสอยู่ที่ F(c, 0) และ F′(-c, 0)
4. จุดยอดอยู่ที่ A(a, 0) และ A′(-a, 0) ซึ่งความยาวแกนตามขวาง คือ AA′ = 2a
5. จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่ B(0, b) และ B′(0, -b) ซึ่งความยาวแกนสังยุค คือ BB′ = 2b
6. สมการเส้นกำกับ(asymptotes) คือ $y = \pm \dfrac{b}{a}x$
7. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\dfrac{2b^2}{a}$ หน่วย
8. ค่าความเยื้องศูนย์(eccentricity) หรือ $e = \dfrac{c}{a}$

2. แกนตามขวางอยู่บนแกน Y



กำหนด ไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางที่จุด (0, 0) และโฟกัสที่จุด F(0, c) และ F′(0, -c) เมื่อ $c > 0$
ให้ P(x, y) เป็นจุดใดๆบนไฮเพอร์โบลา และผลต่างระยะจากจุด P ไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 2a ซึ่ง $a > 0$
จากบทนิยาม จะได้ $\quad |PF' - PF| = 2a$

ในทำนองเดียวกัน จะได้สมการไฮเพอร์โบลาคือ $\boxed{\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1}$ เมื่อ $b^2 = c^2 - a^2$

1. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(0, 0)
2. แกนตามขวางอยู่บนแกน Y
3. จุดโฟกัสอยู่ที่ F(0, c) และ F′(0, -c)
4. จุดยอดอยู่ที่ A(0, a) และ A′(0, -a) ซึ่งความยาวแกนตามขวาง คือ AA′ = 2a0
5. จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่ B(b, 0) และ B′(-b, 0) ซึ่งความยาวแกนสังยุค คือ BB′ = 2b
6. สมการเส้นกำกับ(asymptotes) คือ $y = \pm \dfrac{a}{b}x$
7. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\dfrac{2b^2}{a}$ หน่วย
8. ค่าความเยื้องศูนย์(eccentricity) หรือ $e = \dfrac{c}{a}$

หมายเหตุ 1. จากสมการไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ หรือ $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ ถ้า $a = b$ เราเรียกสมการนี้ว่า **ไฮเพอร์โบลามุมฉาก**(rectangular hyperbola) เช่น $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}=1$ หรือ $x^2-y^2 = 16$

$\frac{y^2}{10}-\frac{x^2}{10}=1$ หรือ $y^2-x^2 = 10$ เป็นต้น

2. จากสมการไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ถ้า $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ แล้ว

จะได้ $y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2$ ดังนั้น $y = \pm\frac{b}{a}x$

นั่นคือ $y = \frac{b}{a}x$ หรือ $y = -\frac{b}{a}x$ ซึ่งเป็น**สมการเส้นกำกับ**ของไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ นั่นเอง

3. ในทำนองเดียวกันจากสมการไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ ถ้า $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=0$ แล้ว

จะได้ $y^2 = \frac{a^2}{b^2}x^2$ ดังนั้น $y = \pm\frac{a}{b}x$

นั่นคือ $y = \frac{a}{b}x$ หรือ $y = -\frac{a}{b}x$ ซึ่ง**สมการเส้นกำกับ**ของไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการไฮเพอร์โบลาจากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1) ผลต่างของระยะจากจุดใดๆบนไฮเพอร์โบลาไปยังจุด (5, 0) และ (-5, 0) เท่ากับ 8 หน่วย

วิธีทำ เนื่องจากจุด (5, 0) และ (-5, 0) เป็นโฟกัสของไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0) และ $c = 5$

แกนตามขวางอยู่บนแกน X และจาก ผลต่างเท่ากับ 8 หน่วย จะได้ $2a = 8$ $\therefore$ $a = 4$

เนื่องจาก $b^2 = c^2 - a^2$ จะได้ $b^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$ $\therefore$ $b = 3$

และสมการอยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ **จะได้สมการที่ต้องการคือ** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ หรือ $9x^2 - 16y^2 = 144$

จุดยอดคือ A(4, 0) และ A′(-4, 0)

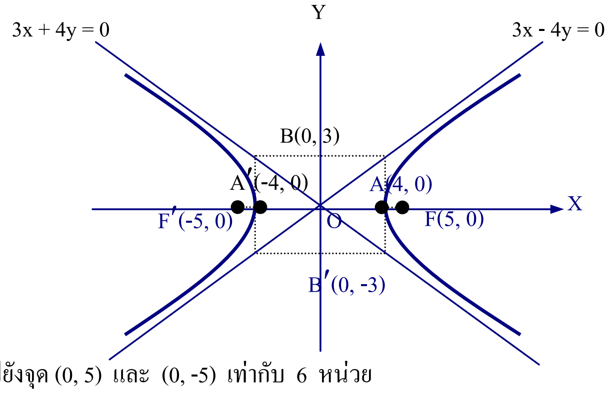
จุดปลายแกนสังยุคคือ B(0, 3) และ B′(0, -3)

สมการเส้นกำกับคือ $y = \pm\frac{3}{4}x$

$3x + 4y = 0$ หรือ $3x - 4y = 0$

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2(3)^2}{4} = \frac{9}{2}$ หน่วย

eccentricity หรือ $e = \frac{5}{4}$



(2) ผลต่างของระยะจากจุดใดๆบนไฮเพอร์โบลาไปยังจุด (0, 5) และ (0, -5) เท่ากับ 6 หน่วย

วิธีทำ เนื่องจากจุด F(0, 5) และ F′(0, -5) เป็นโฟกัสของไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0) และ $c = 5$

แกนตามขวางอยู่บนแกน Y และจาก ผลต่างเท่ากับ 6 หน่วย จะได้ $2a = 6$ $\therefore$ $a = 3$

เนื่องจาก $b^2 = c^2 - a^2$ จะได้ $b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$ $\therefore$ $b = 4$ และสมการอยู่ในรูป $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

จะได้สมการที่ต้องการ คือ $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$ หรือ $16y^2 - 9x^2 = 144$

จุดยอดคือ A(0, 3) และ A′(0, -3)

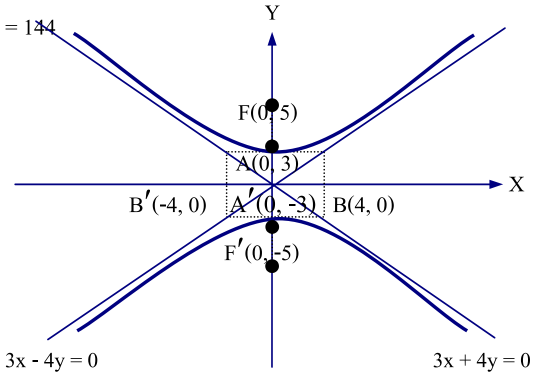
จุดปลายแกนสังยุคคือ B(4, 0) และ B′(-4, 0)

สมการเส้นกำกับคือ $y = \pm\frac{3}{4}x$

$3x + 4y = 0$ หรือ $3x - 4y = 0$

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2(4)^2}{3} = \frac{32}{3}$ หน่วย

eccentricity หรือ $e = \frac{5}{3}$



ตัวอย่างที่ 2 จงหาสมการไฮเพอร์โบลาจากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(3) โฟกัสอยู่ที่จุด (13, 0) และ (-13, 0) และแกนสังยุคยาว 24 หน่วย

วิธีทำ เนื่องจากโฟกัสอยู่ที่จุด (13, 0) และ (-13, 0) จะได้ $c = 13$ และจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0) แกนตามขวางอยู่บนแกน X

และจาก แกนสังยุคยาว 24 หน่วย จะได้ $2b = 24 \therefore b = 12$

เนื่องจาก $b^2 = c^2 - a^2$ หรือ $a^2 = c^2 - b^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25 \therefore a = 5$

และสมการอยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ **จะได้สมการที่ต้องการคือ** $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$ หรือ $144x^2 - 25y^2 = 3600$

จุดยอดคือ A(5, 0) และ A′(-5, 0)

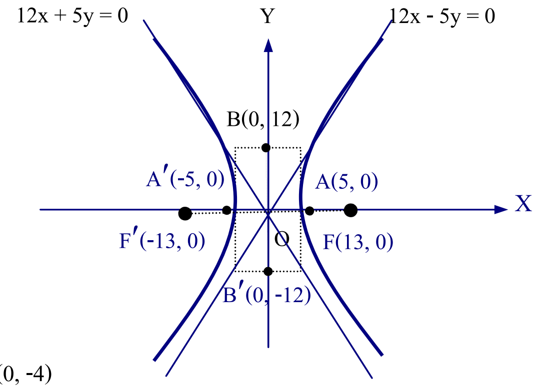
จุดปลายแกนสังยุคคือ B(0, 12) และ B′(0, -12)

สมการเส้นกำกับคือ $y = \pm\frac{12}{5}x$

$12x + 5y = 0$ หรือ $12x - 5y = 0$

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2(12)^2}{5} = \frac{288}{5}$ หน่วย

eccentricity หรือ $e = \frac{13}{5}$



(2) จุดยอดอยู่ที่ (0, 1) และ (0, -1) โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (0, -4)

วิธีทำ เนื่องจากจุดยอดอยู่ที่ (0, 1) และ (0, -1) จะได้ $a = 1$ และจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0) แกนตามขวางอยู่บนแกน Y

และจากโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (0, -4) จะได้ $c = 4$

เนื่องจาก $b^2 = c^2 - a^2$ จะได้ $b^2 = 4^2 - 1^2 = 16 - 1 = 15 \therefore b = \sqrt{15}$

และสมการอยู่ในรูป $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

จะได้สมการที่ต้องการ คือ $\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{15} = 1$ หรือ $15y^2 - x^2 = 15$

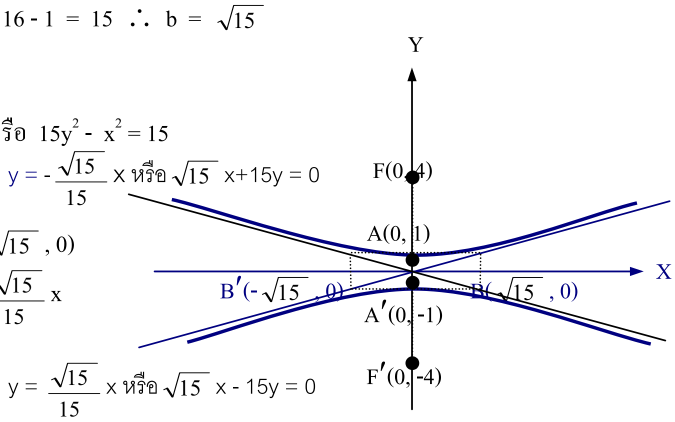
จุดโฟกัสคือ F(0, 4) และ F′0, -4)

จุดปลายแกนสังยุคคือ B($\sqrt{15}$, 0) และ B′(-$\sqrt{15}$, 0)

สมการเส้นกำกับคือ $y = \pm\frac{1}{\sqrt{15}}x = \pm\frac{\sqrt{15}}{15}x$

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2(15)}{1} = 30$ หน่วย

eccentricity หรือ $e = 4$



(3) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0) จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (-2, 0) และ กราฟผ่านจุด ($2\sqrt{2}$, 3)

วิธีทำ เนื่องจาก จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0) จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (-2, 0) แสดงว่าแกนตามขวางอยู่บนแกน X และ $a = 2$

สมการอยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ และกราฟผ่านจุด ($2\sqrt{2}$, 3) จะได้ $\frac{(2\sqrt{2})^2}{2^2} - \frac{3^2}{b^2} = 1$ ซึ่ง $b^2 = 9 \therefore b = 3$

เนื่องจาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 2^2 + 3^2 = 13 \therefore c = \sqrt{13}$

จะได้สมการที่ต้องการคือ $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ หรือ $9x^2 - 4y^2 = 36$

จุดยอดคือ A(2, 0) และ A′(-2, 0)

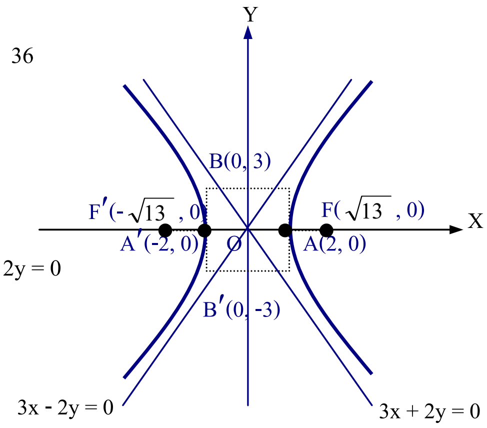
จุดโฟกัสคือ F($\sqrt{13}$, 0) และ F′(-$\sqrt{13}$, 0)

จุดปลายแกนสังยุคคือ B(0, 3) และ B′(0, -3)

สมการเส้นกำกับคือ $y = \pm\frac{3}{2}x$ หรือ $3x + 2y = 0$ กับ $3x - 2y = 0$

ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2(9)}{2} = 9$ หน่วย

eccentricity หรือ $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$



sm.tm

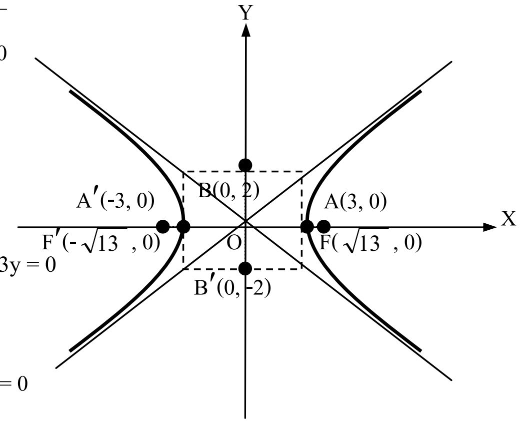
ตัวอย่างที่ 3 จากสมการไฮเพอร์โบลาต่อไปนี้ จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส จุดปลายแกนสังยุค สมการเส้นกำกับ ความยาวลาตัสเรกตัม eccentricity หรือ e พร้อมทั้งเขียนกราฟ

(1) $4x^2 - 9y^2 = 36$

วิธีทำ จาก $4x^2 - 9y^2 = 36$ นำ 36 มาหารทั้งสองข้าง จะได้ $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

เป็นสมการไฮเพอร์โบลาแกนตามขวางอยู่บนแกน X จะได้ $a^2 = 9$ $\therefore$ $a = 3$ และ $b^2 = 4$ $\therefore$ $b = 2$

เนื่องจาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 3^2 + 2^2 = 13$ $\therefore c = \sqrt{13}$



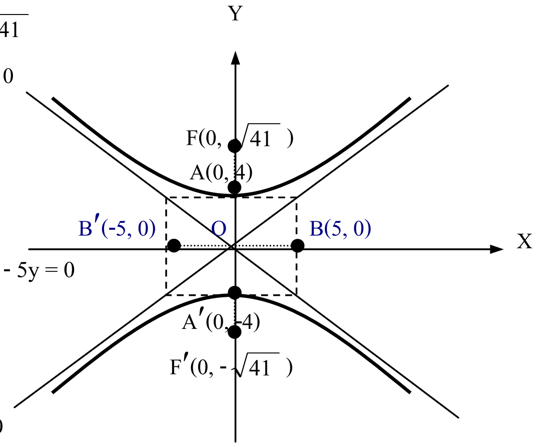
1. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(0, 0)
2. จุดยอดอยู่ที่ A(3, 0) และ A′(-3, 0)
3. จุดโฟกัสอยู่ที่ F($\sqrt{13}$, 0) และ F′(-$\sqrt{13}$, 0)
4. จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่ B(0, 2) และ B′(0, -2)
5. สมการเส้นกำกับคือ $y = \pm\frac{2}{3}x$ หรือ $2x + 3y = 0$ กับ $2x - 3y = 0$
6. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2(4)}{3} = \frac{8}{3}$ หน่วย
7. eccentricity หรือ $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$

(2) $25y^2 - 16x^2 = 400$

วิธีทำ จาก $25y^2 - 16x^2 = 400$ นำ 400 มาหารทั้งสองข้าง จะได้ $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{25} = 1$

เป็นสมการไฮเพอร์โบลาแกนตามขวางอยู่บนแกน Y จะได้ $a^2 = 16$ $\therefore$ $a = 4$ และ $b^2 = 25$ $\therefore$ $b = 5$

เนื่องจาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 16 + 25 = 41$ $\therefore c = \sqrt{41}$



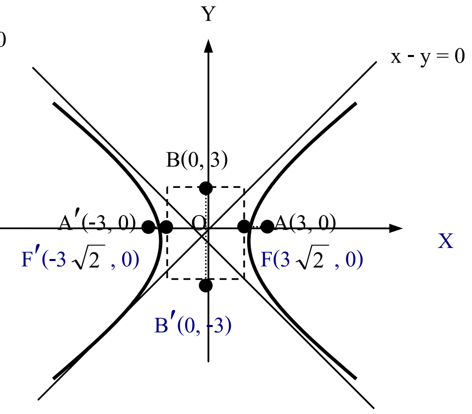
1. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(0, 0)
2. จุดยอดอยู่ที่ A(0, 4) และ A′(0, -4)
3. จุดโฟกัสอยู่ที่ F(0, $\sqrt{41}$) และ F′(0, -$\sqrt{41}$)
4. จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่ B(5, 0) และ B′(-5, 0)
5. สมการเส้นกำกับคือ $y = \pm\frac{4}{5}x$ หรือ $4x + 5y = 0$ กับ $4x - 5y = 0$
6. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2(25)}{4} = \frac{25}{2}$ หน่วย
7. eccentricity หรือ $e = \frac{\sqrt{41}}{4}$

(3) $x^2 - y^2 = 9$

วิธีทำ จาก $x^2 - y^2 = 9$ นำ 9 มาหารทั้งสองข้าง จะได้ $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$

เป็นสมการไฮเพอร์โบลาแกนตามขวางอยู่บนแกน X จะได้ $a^2 = 9$ $\therefore$ $a = 3$ และ $b^2 = 9$ $\therefore$ $b = 3$

เนื่องจาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 9 + 9 = 18$ $\therefore c = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$



1. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(0, 0)
2. จุดยอดอยู่ที่ A(3, 0) และ A′(-3, 0)
3. จุดโฟกัสอยู่ที่ F(3$\sqrt{2}$, 0) และ F′(-3$\sqrt{2}$, 0)
4. จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่ B(0, 3) และ B′(0, -3)
5. สมการเส้นกำกับคือ $y = \pm x$ หรือ $x + y = 0$ กับ $x - y = 0$
6. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2(9)}{3} = 6$ หน่วย
7. eccentricity หรือ $e = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$

ตัวอย่างที่ 4 จากสมการไฮเพอร์โบลาต่อไปนี้ จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส จุดปลายแกนสังยุค สมการเส้นกำกับ ความยาวลาตัสเรกตัม eccentricity หรือ e พร้อมทั้งเขียนกราฟ

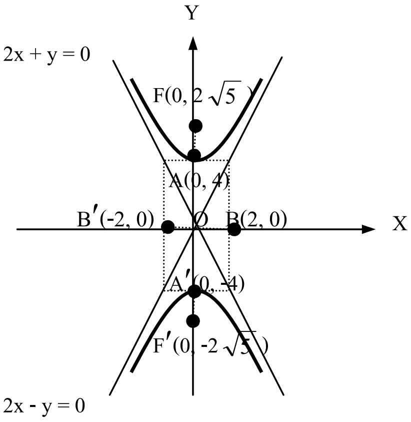
(1) $4x^2 - y^2 = -16$

วิธีทำ จาก $4x^2 - y^2 = -16$ นำ -16 มาหารทั้งสองข้าง จะได้ $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$

เป็นสมการไฮเพอร์โบลาแกนตามขวางอยู่บนแกน Y จะได้ $a^2 = 16$ $\therefore$ $a = 4$ และ $b^2 = 4$ $\therefore$ $b = 2$

เนื่องจาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 16 + 4 = 20$ $\therefore c = 2\sqrt{5}$

1. จุดศูนย์กกลางอยู่ที่ C(0, 0)
2. จุดยอดอยู่ที่ A(0, 4) และ A′(0, -4)
3. จุดโฟกัสอยู่ที่ F(0, $2\sqrt{5}$) และ F′(0, $-2\sqrt{5}$)
4. จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่ B(2, 0) และ B′(-2, 0)
5. สมการเส้นกำกับคือ $y = \pm 2x$ หรือ $2x + y = 0$ กับ $2x - y = 0$
6. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2(4)}{4} = 2$ หน่วย
7. eccentricity หรือ $e = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$



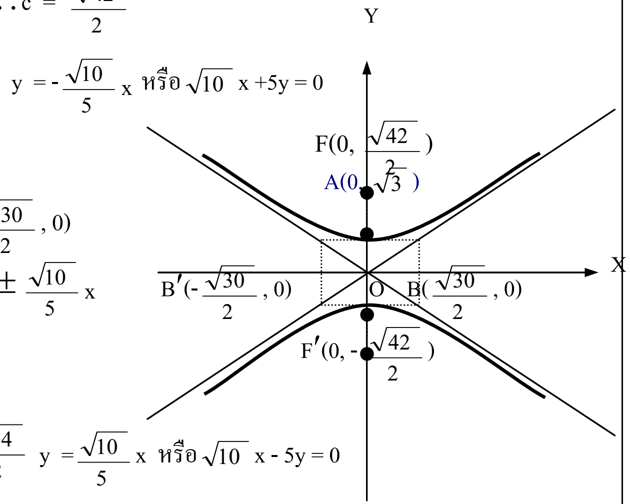
(2) $5y^2 - 2x^2 = 15$

วิธีทำ จาก $5y^2 - 2x^2 = 15$ นำ 15 มาหารทั้งสองข้าง จะได้ $\frac{y^2}{3} - \frac{2x^2}{15} = 1$ หรือ $\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{\frac{15}{2}} = 1$

เป็นสมการไฮเพอร์โบลาแกนตามขวางอยู่บนแกน Y จะได้ $a^2 = 3$ $\therefore$ $a = \sqrt{3}$ และ $b^2 = \frac{15}{2}$ $\therefore$ $b = \frac{\sqrt{30}}{2}$

เนื่องจาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 3 + \frac{15}{2} = \frac{21}{2}$ $\therefore c = \frac{\sqrt{42}}{2}$

1. จุดศูนย์กกลางอยู่ที่ C(0, 0)
2. จุดยอดอยู่ที่ A(0, $\sqrt{3}$) และ A′(0, $-\sqrt{3}$)
3. จุดโฟกัสอยู่ที่ F(0, $\frac{\sqrt{42}}{2}$) และ F′(0, $-\frac{\sqrt{42}}{2}$)
4. จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่ B($\frac{\sqrt{30}}{2}$, 0) และ B′($-\frac{\sqrt{30}}{2}$, 0)
5. สมการเส้นกำกับคือ $y = \pm\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{30}}x$ หรือ $y = \pm\frac{\sqrt{10}}{5}x$
6. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2(\frac{15}{2})}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$ หน่วย
7. eccentricity หรือ $e = \frac{\sqrt{42}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{126}}{6} = \frac{\sqrt{14}}{2}$

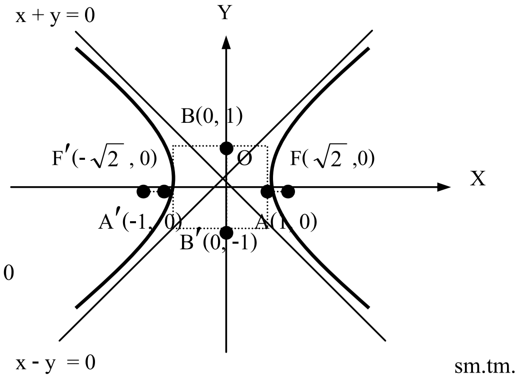


(3) $x^2 - y^2 = 1$

วิธีทำ จาก $x^2 - y^2 = 1$ เป็นสมการไฮเพอร์โบลาแกนตามขวางอยู่บนแกน X จะได้ $a^2 = 1$ $\therefore$ $a = 1$ และ $b^2 = 1$ $\therefore$ $b = 1$

เนื่องจาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 1 + 1 = 2$ $\therefore c = \sqrt{2}$

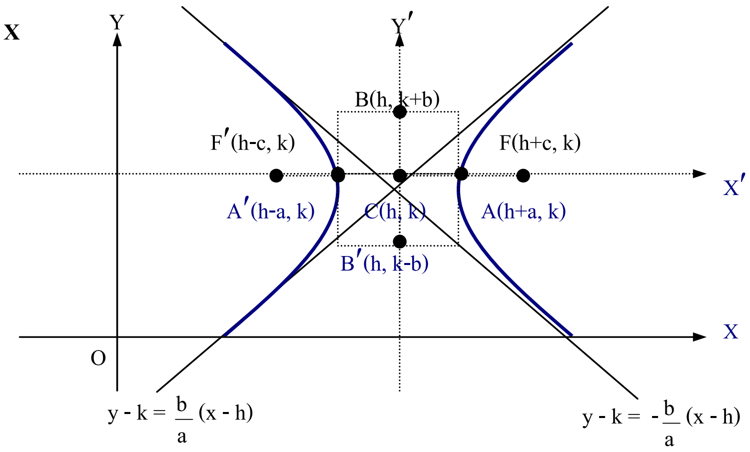
1. จุดศูนย์กกลางอยู่ที่ C(0, 0)
2. จุดยอดอยู่ที่ A(1, 0) และ A′(-1, 0)
3. จุดโฟกัสอยู่ที่ F($\sqrt{2}$,0) และ F′($-\sqrt{2}$, 0)
4. จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่ B(0, 1) และ B′(0, -1)
5. สมการเส้นกำกับคือ $y = \pm x$ หรือ $x + y = 0$ กับ $x - y = 0$
6. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ 2 หน่วย
7. eccentricity หรือ $e = \sqrt{2}$



sm.tm.

สมการของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k)

1. แกนตามขวางขนานกับบนแกน X



กำหนด ไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k) แกนตามขวางขนานกับแกน X อยู่บนเส้นตรง $y = k$

จากความรู้เรื่องการเลื่อนแกนทางขนาน จะได้สมการไฮเพอร์โบลาเมื่อเทียบกับแกนใหม่ คือ

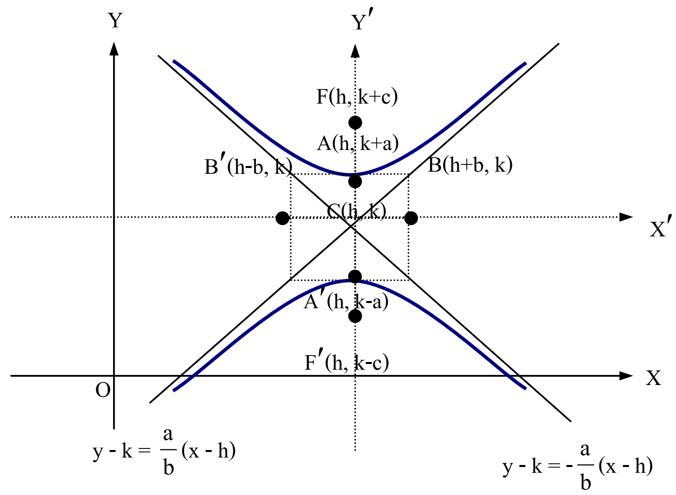
$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

แต่ $x' = x - h$ และ $y' = y - k$ จะได้สมการไฮเพอร์โบลาเมื่อเทียบกับแกนเดิม คือ

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1} \qquad \text{เมื่อ } b^2 = c^2 - a^2 \text{ และ } 0 < a < c$$

1. แกนตามขวางขนานกับแกน X อยู่บนเส้นตรง $y = k$
2. จุดศูนย์กลางที่จุด C(h, k)
3. จุดโฟกัสอยู่ที่จุด F(h + c, k) และ F′(h - c, k)
4. จุดยอดอยู่ที่จุด A(h + a, k) และ A′(h - a, k)
5. จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่จุด B(h, k + b) และ B′(h, k - b)
6. สมการเส้นกำกับ(asymptotes) คือ $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$
7. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$ หน่วย
8. ค่าความเยื้องศูนย์(eccentricity) หรือ $e = \frac{c}{a}$

2. แกนตามขวางขนานกับบนแกน Y



กำหนด ไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k) แกนตามขวางขนานกับแกน Y อยู่บนเส้นตรง $x = h$

จากความรู้เรื่องการเลื่อนแกนทางขนาน จะได้สมการไฮเพอร์โบลาเมื่อเทียบกับแกนใหม่ คือ $\frac{(y')^2}{a^2} - \frac{(x')^2}{b^2} = 1$

แต่ $x' = x - h$ และ $y' = y - k$ จะได้สมการไฮเพอร์โบลาเมื่อเทียบกับแกนเดิม คือ

$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1} \quad \text{เมื่อ } b^2 = c^2 - a^2 \text{ และ } 0 < a < c$$

1. แกนตามขวางขนานกับแกน Y อยู่บนเส้นตรง $x = h$
2. จุดศูนย์กลางที่จุด C(h, k)
3. จุดโฟกัสอยู่ที่จุด F(h, k + c) และ F′(h , k - c)
4. จุดยอดอยู่ที่จุด A(h, k + a) และ A′(h, k - a)
5. จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่จุด B(h + b, k) และ B′(h - b, k)
6. สมการเส้นกำกับ(asymptotes) คือ $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$
7. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$ หน่วย
8. ค่าความเยื้องศูนย์(eccentricity) หรือ $e = \frac{c}{a}$

สรุปสมการของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k) ดังนี้

จุดศูนย์กลาง (h, k)

แกนตามขวางขนานกับแกน X	แกนตามขวางขนานกับแกน Y
$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

หมายเหตุ (1) สมการ $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ หรือ $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
เรียกว่า สมการมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา ที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k)

(2) เส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
จะมีสมการในรูป $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 0$ หรือ $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$
และเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
จะมีสมการในรูป $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 0$ หรือ $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$

(3) ถ้า $a = b$ แล้ว จะเรียกไฮเพอร์โบลานั้นว่า **ไฮเพอร์โบลามุมฉาก**

(4) จากสมการมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา ถ้ากระจายและทำให้เป็นผลสำเร็จ จะได้**สมการอยู่ในรูปทั่วไป**คือ $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ เมื่อ A และ B ไม่เท่ากับศูนย์ และมีจำนวนหนึ่งเป็นบวก อีกจำนวนหนึ่งเป็นลบ เนื่องจากสัมประสิทธิ์ของ x^2 ไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้นอาจเขียนสมการดังกล่าวได้เป็นดังนี้
$x^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$

(5) กราฟของสมการ $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ เมื่อ $A>0, B<0$ หรือ $A<0, B>0$ **อาจจะไม่เป็นกราฟไฮเพอร์โบลาก็ได้** ถ้าต้องการทราบต้องจัดสมการใหม่โดยใช้กำลังสองสมบูรณ์ sm.tm

ตัวอย่างที่ 5 จงหาสมการไฮเพอร์โบลา จากสิ่งที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) ผลต่างของระยะจากจุดใดๆบนไฮเพอร์โบลาไปยังจุด(4, 2)0 และ (-2, 2) เท่ากับ 4 หน่วย

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้โฟกัสอยู่ที่จุด(4, 2) และ (-2, 2) และจุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสองคือจุด (1, 2)

จะได้จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (1, 2) จะได้ $h = 1,\ k = 2$ และผลต่างคงตัวเท่ากับ 4 หน่วย จะได้ $2a = 4 \ \therefore\ a = 2$

ระยะระหว่างจุด (1, 2) กับจุด (4, 2) เท่ากับ 3 หน่วย $\therefore\ c = 3$

จาก $b^2 = c^2 - a^2$ จะได้ $b^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5 \ \therefore\ b = \sqrt{5}$

แกนตามขวางขนานกับแกน X อยู่บนเส้นตรง $y = 2$

สมการอยู่ในรูป $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

จะได้สมการไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{(x-1)^2}{2^2} - \frac{(y-2)^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$

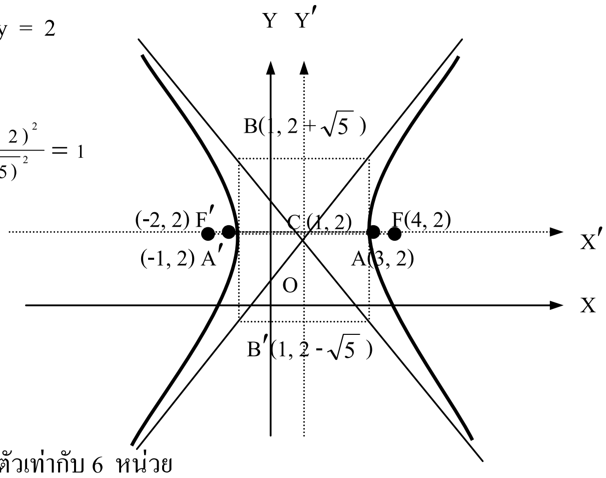
$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$$

$$5(x-1)^2 - 4(y-2)^2 = 20$$

$$5(x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 - 4y + 4) = 20$$

$$5x^2 - 10x + 5 - 4y^2 + 16y - 16 = 20$$

$$5x^2 - 4y^2 - 10x + 16y - 31 = 0$$



(2) โฟกัสอยู่ที่จุด(-2, -6) และ (-2, 4) และผลต่างคงตัวเท่ากับ 6 หน่วย

วิธีทำ จาก โฟกัสอยู่ที่จุด(-2, -6) และ (-2, 4) จะได้ จุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสองคือ (-2, -1)

จะได้จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (-2, -1) จะได้ $h = -2,\ k = -1$ และผลต่างคงตัวเท่ากับ 6 หน่วย จะได้ $2a = 6 \ \therefore\ a = 3$

ระยะระหว่างจุด (-2, -1) กับจุด (-2, 4) เท่ากับ 5 หน่วย $\therefore\ c = 5$

จาก $b^2 = c^2 - a^2$ จะได้ $b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \ \therefore\ b = 4$

แกนตาขวางขนานกับแกน Y อยู่บนเส้นตรง $x = -2$

สมการอยู่ในรูป $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

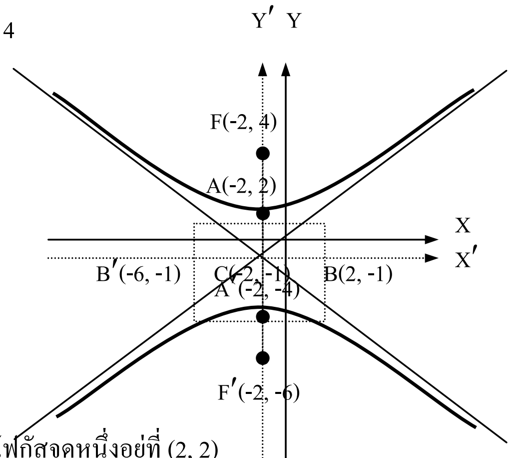
จะได้ สมการไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{(y+1)^2}{3^2} - \frac{(x+2)^2}{4^2} = 1$

$$16(y+1)^2 - 9(x+2)^2 = 144$$

$$16(y^2 + 2y + 1) - 9(x^2 + 4x + 4) = 144$$

$$16y^2 + 32y + 16 - 9x^2 - 36x - 36 = 144$$

$$16y^2 - 9x^2 + 32y - 36x - 164 = 0$$



(3) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (2, -3) และจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (2, -1) และโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (2, 2)

วิธีทำ จากจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (2, -3) จะได้ $h = 2,\ k = -3$ และจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (2, -1)

จะได้แกนตามขวางขนานกับแกน Y อยู่บนเส้นตรง $x = 2$

ระยะระหว่างจุด (2, -3) กับจุด (2, -1) เท่ากับ 2 หน่วย $\therefore\ a = 2$

ระยะระหว่างจุด (2, -3) กับจุด (2, 2) เท่ากับ 5 หน่วย $\therefore\ c = 5$

จาก $b^2 = c^2 - a^2$ จะได้ $b^2 = 5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21 \ \therefore\ b = \sqrt{21}$

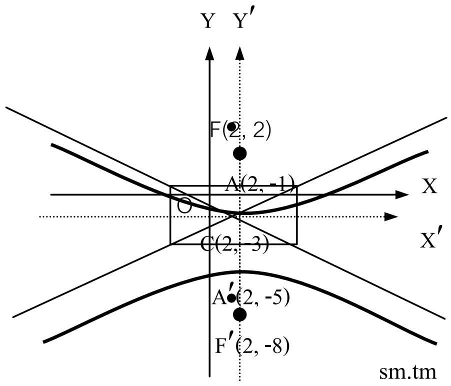
สมการอยู่ในรูป $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

จะได้ สมการไฮเพอร์โบลาคือ $\frac{(y+3)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{21} = 1$

$$21(y+3)^2 - 4(x-2)^2 = 84$$

$$21y^2 + 126y + 189 - 4x^2 + 16x - 16 = 84$$

$$21y^2 - 4x^2 + 126y + 16x + 89 = 0$$



sm.tm

(4) จุดยอดอยู่ที่ (-1, 3) และ (1, 3) แกนสังยุคยาว 4 หน่วย

วิธีทำ จาก จุดยอดอยู่ที่ (-1, 3) และ (1, 3) จะได้ จุดกึ่งกลางระหว่างจุดยอดทั้งสองคือ (0, 3)

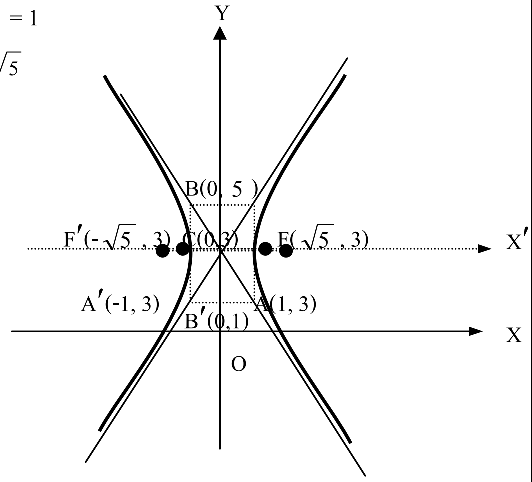
จะได้จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 3) $\therefore$ h = 0, k = 3 เนื่องจากแกนสังยุคยาว 4 หน่วย จะได้ 2b = 4 $\therefore$ b = 2

และระยะระหว่างจุด (0, 3) กับจุด (1, 3) เท่ากับ 1 หน่วย $\therefore$ a = 1

จาก $b^2 = c^2 - a^2$ จะได้ $c^2 = a^2 + b^2 = 1^2 + 2^2 = 5$ $\therefore c = \sqrt{5}$

แกนตามขวางขนานกับแกน X อยู่บนเส้นตรง y = 3

สมการอยู่ในรูป $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$



จะได้สมการไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{(x-0)^2}{1^2} - \frac{(y-3)^2}{2^2} = 1$

$$x^2 - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

$$4x^2 - (y-3)^2 = 4$$

$$4x^2 - (y^2 - 6y + 9) = 4$$

$$4x^2 - y^2 + 6y - 9 = 4$$

$$4x^2 - y^2 + 6y - 13 = 0$$

(5) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (-4, 2) โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (-4, 6) และจุดยอดจุดหนึ่งอยู่บนแกน X

วิธีทำ จาก จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (-4, 2) จะได้ h = -4 , k = 2 และโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (-4, 6)

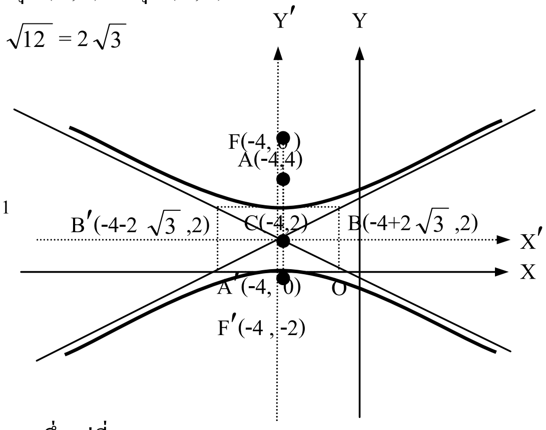
ระยะระหว่างจุด (-4, 2) กับจุด (-4, 6) เท่ากับ 4 หน่วย $\therefore$ c = 4

และจุดยอดจุดหนึ่งอยู่บนแกน X คือจุด (-4, 0) ระยะระหว่างจุด (-4, 2) กับจุด (-4, 0) เท่ากับ 2 หน่วย $\therefore$ a = 2

จาก $b^2 = c^2 - a^2$ จะได้ $b^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$ $\therefore$ b = $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

แกนตามขวางขนานกับแกน Y อยู่บนเส้นตรง x = -4

สมการอยู่ในรูป $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$



จะได้ สมการไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+4)^2}{12} = 1$

$$3(y-2)^2 - (x+4)^2 = 12$$

$$3(y^2 - 4y + 4) - (x^2 + 8x + 16) = 12$$

$$3y^2 - 12y + 12 - x^2 - 8x - 16 = 12$$

$$3y^2 - x^2 - 12y - 8x - 16 = 0$$

(6) จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่จุด (-1, 5) และ (-1, -1) และ จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (3, 2)

วิธีทำ จาก จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่จุด (-1, 5) และ (-1, -1) จะได้ จุดกึ่งกลางระหว่างจุดทั้งสองคือ (-1, 2)

จะได้จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (-1, 2) จะได้ h = -1 , k = 2

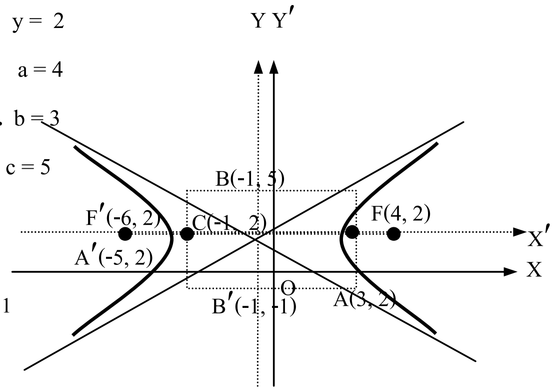
จะได้แกนตามขวางขนานขนานกับแกน X อยู่บนเส้นตรง y = 2

ระยะระหว่างจุด (-1, 2) กับจุด (3, 2) เท่ากับ 4 หน่วย $\therefore$ a = 4

ระยะระหว่างจุด (-1, 2) กับจุด (-1, 5) เท่ากับ 3 หน่วย $\therefore$ b = 3

จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$ $\therefore$ c = 5

สมการอยู่ในรูป $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$



จะได้ สมการไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

$$9(x^2 + 2x + 1) - 16(y^2 - 4y + 4) = 144$$

$$9x^2 + 18x + 9 - 16y^2 + 64y - 64 = 144$$

$$9x^2 - 16y^2 + 18x + 64y - 199 = 0$$

ตัวอย่างที่ 6 จากสมการไฮเพอร์โบลาต่อไปนี้ จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส จุดปลายแกนสังยุค สมการเส้นกำกับ ความยาวลาตัสเรกตัม eccentricity หรือ e พร้อมทั้งเขียนกราฟ

(1) $4x^2 - y^2 + 6y - 13 = 0$

วิธีทำ จาก $4x^2 - y^2 + 6y - 13 = 0$

$$4x^2 - (y^2 - 6y) = 13$$

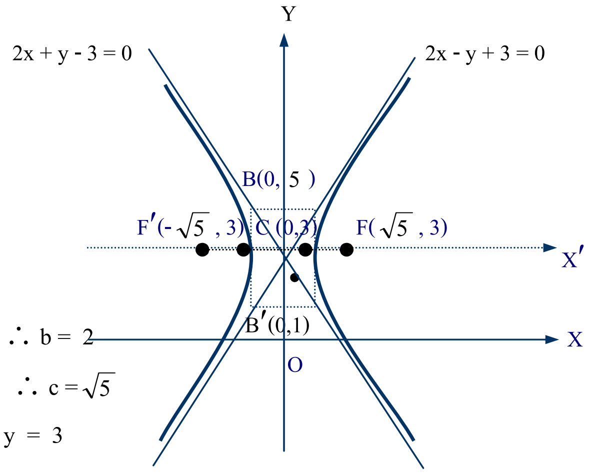
$$4x^2 - (y^2 - 6y + 9) = 13 - 9$$

$$4x^2 - (y - 3)^2 = 4$$

$$\frac{x^2}{1} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

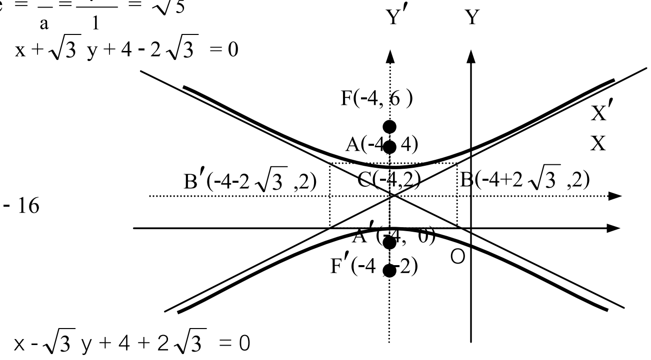
จะได้ $h = 0$, $k = 3$ และ $a^2 = 1 \therefore a = 1$, $b^2 = 4 \therefore b = 2$

จาก $b^2 = c^2 - a^2$ จะได้ $c^2 = a^2 + b^2 = 1 + 4 = 5 \therefore c = \sqrt{5}$



1. แกนตามขวางขนานกับแกน X อยู่บนเส้นตรง $y = 3$
2. จุดศูนย์กลางที่จุด $C(h, k) = C(0, 3)$
3. จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(h + c, k) = F(0 + \sqrt{5}, 3) = F(\sqrt{5}, 3)$ และ $F'(h - c, k) = F'(0 - \sqrt{5}, 3) = F'(-\sqrt{5}, 3)$
4. จุดยอดอยู่ที่จุด $A(h + a, k) = A(0 + 1, 3) = A(1, 3)$ และ $A'(h - a, k) = A'(0 - 1, 3) = A'(-1, 3)$
5. จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่จุด $B(h, k + b) = B(0, 3 + 2) = B(0, 5)$ และ $B'(h, k - b) = B'(0, 3 - 2) = B'(0, 1)$
6. สมการเส้นกำกับ(asymptotes) คือ $y - 3 = \pm 2x$ หรือ $2x + y - 3 = 0$ กับ $2x - y + 3 = 0$
7. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)}{1} = 8$ หน่วย
8. ค่าความเยื้องศูนย์(eccentricity) หรือ $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$

(2) $3y^2 - x^2 - 12y - 8x - 16 = 0$



วิธีทำ จาก $3y^2 - x^2 - 12y - 8x - 16 = 0$

$$(3y^2 - 12y) - (x^2 + 8x) = 16$$

$$3(y^2 - 4y + 4) - (x^2 + 8x + 16) = 16 + 12 - 16$$

$$3(y^2 - 4y + 4) - (x^2 + 8x + 16) = 12$$

$$3(y - 2)^2 - (x + 4)^2 = 12$$

$$\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+4)^2}{12} = 1$$

จะได้ $h = -4$, $k = 2$ และ $a^2 = 4 \therefore a = 2$, $b^2 = 12 \therefore b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

จาก $b^2 = c^2 - a^2$ จะได้ $c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 12 = 16 \therefore c = 4$

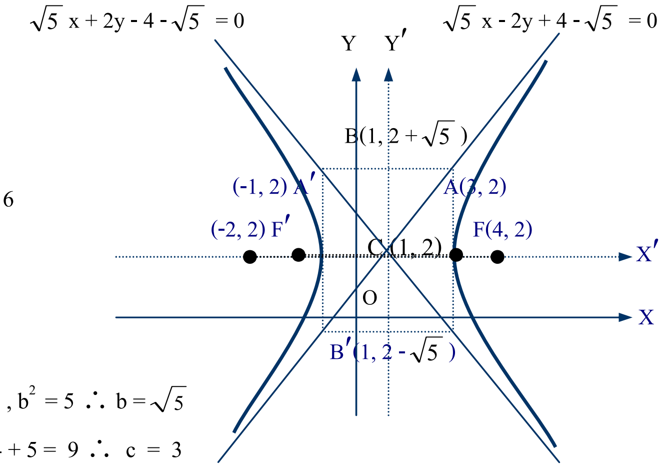
1. แกนตามขวางขนานกับแกน Y อยู่บนเส้นตรง $x = -4$
2. จุดศูนย์กลางที่จุด $C(h, k)$
3. จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(h, k + c) = F(-4, 2 + 4) = F(-4, 6)$ และ $F'(h, k - c) = F'(-4, 2 - 4) = F'(-4, -2)$
4. จุดยอดอยู่ที่จุด $A(h, k + a) = A(-4, 2 + 2) = A(-4, 4)$ และ $A'(h, k - a) = A'(-4, 2 - 2) = A'(-4, 0)$
5. จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่จุด $B(h + b, k) = B(-4 + 2\sqrt{3}, 2)$ และ $B'(h - b, k) = B'(-4 - 2\sqrt{3}, 2)$
6. สมการเส้นกำกับ(asymptotes) คือ $y - 2 = \pm \frac{2}{2\sqrt{3}}(x + 4)$ หรือ $y - 2 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}(x + 4)$

   หรือ $x + \sqrt{3}y + 4 - 2\sqrt{3} = 0$ กับ $x - \sqrt{3}y + 4 + 2\sqrt{3} = 0$

   หรือ $\sqrt{3}x + 3y + 4\sqrt{3} - 6 = 0$ กับ $\sqrt{3}x - 3y + 4\sqrt{3} + 6 = 0$
7. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(12)}{2} = 12$ หน่วย
8. eccentricity หรือ $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2$

sm.tm

(3) $5x^2 - 4y^2 - 10x + 16y - 31 = 0$



วิธีทำ จาก $5x^2 - 4y^2 - 10x + 16y - 31 = 0$

$$(5x^2 - 10x) - (4y^2 - 16y) = 31$$
$$5(x^2 - 2x) - 4(y^2 - 4y) = 31$$
$$5(x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 - 4y + 4) = 31 + 5 - 16$$
$$5(x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 - 4y + 4) = 20$$
$$5(x - 1)^2 - 4(y - 2)^2 = 20$$
$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$$

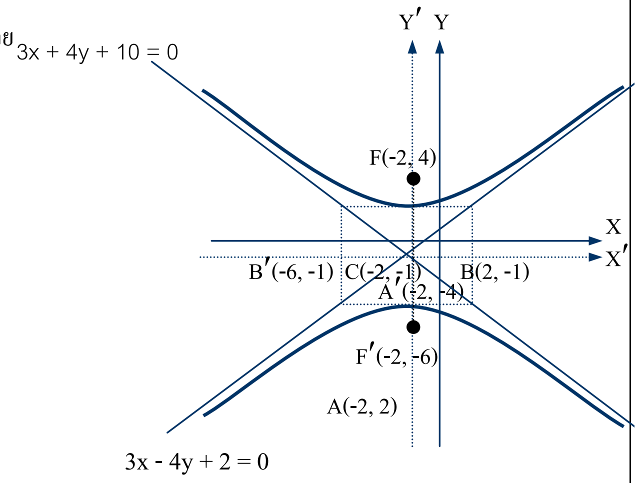
จะได้ $h = 1,\ k = 2$ และ $a^2 = 4 \therefore a = 2,\ b^2 = 5 \therefore b = \sqrt{5}$

จาก $b^2 = c^2 - a^2$ จะได้ $c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 5 = 9 \therefore c = 3$

1. แกนตามขวางขนานกับแกน X อยู่บนเส้นตรง $y = 2$
2. จุดศูนย์กลางที่จุด $C(h, k) = C(1, 2)$
3. จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(h + c, k) = F(1 + 3, 2) = F(4, 2)$ และ $F'(h - c, k) = F'(1 - 3, 2) = F'(-2, 2)$
4. จุดยอดอยู่ที่จุด $A(h + a, k) = A(1 + 2, 2) = A(3, 2)$ และ $A'(h - a, k) = A'(1 - 2, 2) = A'(-1, 2)$
5. จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่จุด $B(h, k + b) = B(1, 2 + \sqrt{5})$ และ $B'(h, k - b) = B'(1, 2 - \sqrt{5})$
6. สมการเส้นกำกับ(asymptotes) คือ $y - 2 = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}(x - 1)$

   หรือ $\sqrt{5}\,x + 2y - 4 - \sqrt{5} = 0$ กับ $\sqrt{5}\,x - 2y + 4 - \sqrt{5} = 0$
7. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(5)}{2} = 5$ หน่วย
8. eccentricityหรือ $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$

(4) $16y^2 - 9x^2 + 32y - 36x - 164 = 0$



วิธีทำ จาก $16y^2 - 9x^2 + 32y - 36x - 164 = 0$

$$(16y^2 + 32y) - (9x^2 + 36x) = 164$$
$$16(y^2 + 2y) - 9(x^2 + 4x) = 164$$
$$16(y^2 + 2y + 1) - 9(x^2 + 4x + 4) = 164 + 16 - 36$$
$$16(y + 1)^2 - 9(x + 2)^2 = 144$$
$$\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{16} = 1$$

จะได้ $h = -2,\ k = -1$ และ $a^2 = 9 \therefore a = 3,\ b^2 = 16 \therefore b = 4$

จาก $b^2 = c^2 - a^2$ จะได้ $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25 \therefore c = 5$

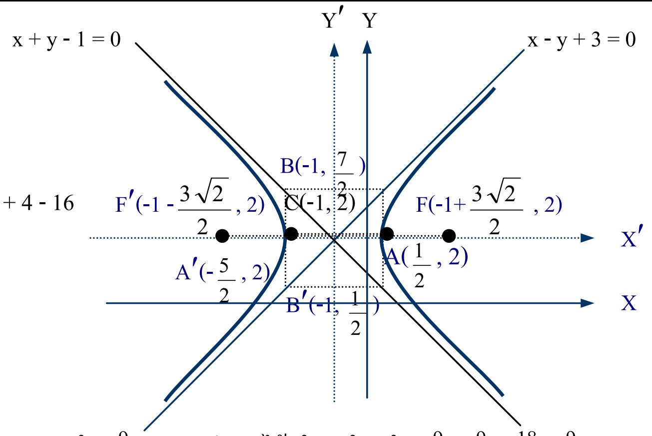
1. แกนตาขวางขนานกับแกน Y อยู่บนเส้นตรง $x = -2$
2. จุดศูนย์กลางที่จุด $C(h, k) = C(-2, -1)$
3. จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(h, k + c) = F(-2, -1 + 5) = F(-2, 4)$ และ $F'(h, k - c) = F'(-2, -1 - 5) = F'(-2, -6)$
4. จุดยอดอยู่ที่จุด $A(h, k + a) = A(-2, -1 + 3) = A(-2, 2)$ และ $A'(h, k - a) = A'(-2, -1 - 3) = A'(-2, -4)$
5. จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่จุด $B(h + b, k) = B(-2 + 4, -1) = B(2, -1)$และ $B'(h - b, k) = B'(-2 - 4, -1) = B'(-6, -1)$
6. สมการเส้นกำกับ(asymptotes) คือ $y + 1 = \pm\frac{3}{4}(x + 2)$

   หรือ $3x + 4y + 10 = 0$ กับ $3x - 4y + 2 = 0$
7. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(16)}{3} = \frac{32}{3}$ หน่วย
8. ค่าความเยื้องศูนย์(eccentricity) หรือ $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$

(5) $4x^2 - 4y^2 + 8x + 16y - 21 = 0$

วิธีทำ จาก $4x^2 - 4y^2 + 8x + 16y - 21 = 0$

$$(4x^2 + 8x) - (4y^2 - 16y) = 21$$
$$4(x^2 + 2x) - 4(y^2 - 4y) = 21$$
$$4(x^2 + 2x + 1) - 4(y^2 - 4y + 4) = 21 + 4 - 16$$
$$4(x+1)^2 - 4(y-2)^2 = 9$$
$$\frac{4(x+1)^2}{9} - \frac{4(y-2)^2}{9} = 1$$
$$\frac{(x+1)^2}{\frac{9}{4}} - \frac{(y-2)^2}{\frac{9}{4}} = 1$$



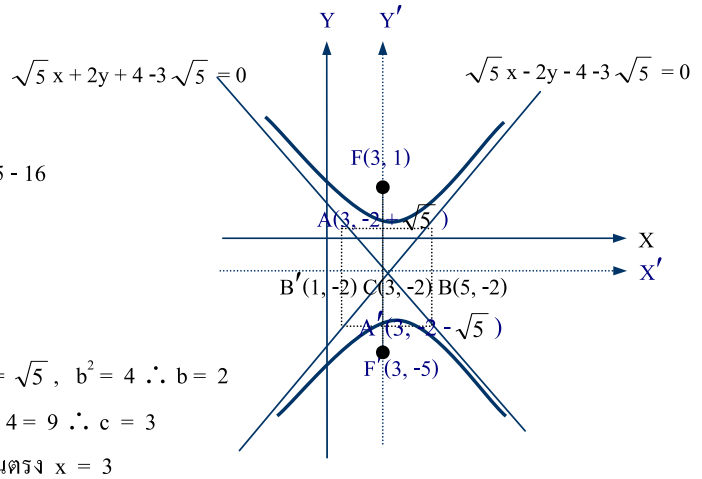
จะได้ $h = -1,\ k = 2$ และ $a^2 = \frac{9}{4}$ $\therefore a = \frac{3}{2}$, $b^2 = \frac{9}{4}$ $\therefore b = \frac{3}{2}$ จะได้ $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{9}{4} + \frac{9}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$ $\therefore c = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

1. แกนตามขวางขนานกับแกน X อยู่บนเส้นตรง $y = 2$
2. จุดศูนย์กลางที่จุด $C(h, k) = C(-1, 2)$
3. จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(h + c, k) = F(-1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}, 2)$ และ $F'(h - c, k) = F'(-1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}, 2)$
4. จุดยอดอยู่ที่จุด $A(h + a, k) = A(-1 + \frac{3}{2}, 2) = A(\frac{1}{2}, 2)$ และ $A'(h - a, k) = A'(-1 - \frac{3}{2}, 2) = A'(-\frac{5}{2}, 2)$
5. จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่จุด $B(h, k + b) = B(-1, 2 + \frac{3}{2}) = B(-1, \frac{7}{2})$ และ $B'(h, k - b) = B'(-1, 2 - \frac{3}{2}) = B'(-1, \frac{1}{2})$
6. สมการเส้นกำกับ(asymptotes) คือ $y - 2 = \pm(x + 1)$ หรือ $x + y - 1 = 0$ กับ $x - y + 3 = 0$
7. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(\frac{9}{4})}{2} = \frac{9}{4}$ หน่วย
8. eccentricityหรือ $e = \frac{c}{a} = (\frac{3\sqrt{2}}{2})(\frac{2}{3}) = \sqrt{2}$

(6 $5x^2 - 4y^2 - 30x - 16y + 49 = 0$

วิธีทำ จาก $5x^2 - 4y^2 - 30x - 16y + 49 = 0$

$$(5x^2 - 30x) - (4y^2 + 16y) = -49$$
$$5(x^2 - 6x) - 4(y^2 + 4y) = -49$$
$$5(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 + 4y + 4) = -49 + 45 - 16$$
$$5(x-3)^2 - 4(y+2)^2 = -20$$
$$4(y+2)^2 - 5(x-3)^2 = 20$$
$$\frac{(y+2)^2}{5} - \frac{(x-3)^2}{4} = 1$$



จะได้ $h = 3,\ k = -2$ และ $a^2 = 5$ $\therefore a = \sqrt{5}$, $b^2 = 4$ $\therefore b = 2$

จาก $b^2 = c^2 - a^2$ จะได้ $c^2 = a^2 + b^2 = 5 + 4 = 9$ $\therefore c = 3$

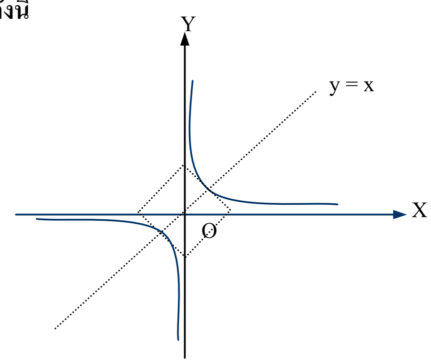
1. แกนตาขวางขนานกับแกน Y อยู่บนเส้นตรง $x = 3$
2. จุดศูนย์กลางที่จุด $C(h, k) = C(3, -2)$
3. จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(h, k + c) = F(3, -2 + 3) = F(3, 1)$ และ $F'(h, k - c) = F'(3, -2 - 3) = F'(3, -5)$
4. จุดยอดอยู่ที่จุด $A(h, k + a) = A(3, -2 + \sqrt{5})$ และ $A'(h, k - a) = A'(3, -2 - \sqrt{5})$
5. จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่จุด $B(h + b, k) = B(3 + 2, -2) = B(5, -2)$และ $B'(h - b, k) = B'(3 - 2, -2) = B'(1, -2)$
6. สมการเส้นกำกับ(asymptotes) คือ $y + 2 = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}(x - 3)$ หรือ $\sqrt{5}x + 2y + 4 - 3\sqrt{5} = 0$ กับ $\sqrt{5}x - 2y - 4 - 3\sqrt{5} = 0$
7. ลาตัสเรกตัมยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ หน่วย
8. eccentricityหรือ $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

ไฮเพอร์โบลามุมฉาก(Rectangular Hyperbola)

ไฮเพอร์โบลามุมฉาก คือ ไฮเพอร์โบลาที่มีความยาวของแกนตามขวาง**เท่ากับ**ความยาวของแกนสังยุค เช่น $x^2 - y^2 = 4$, $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{5} = 1$, $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$, $xy = 7$, $xy = -10$, $xy - y = 5$, $xy - x = -3$, $(x-2)(y+3) = 5$ เป็นต้น

โดยทั่วไปสมการไฮเพอร์โบลาที่อยู่ในรูป $xy = a$ **เมื่อ** $a > 0$ **จะมีลักษณะดังนี้**

1. เป็นกราฟไฮเพอร์โบลามุมฉาก (กราฟอยู่ในควอดรันต์ที่ 1 และ 3)
2. จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0)
3. แกนตามขวางอยู่บนเส้นตรง $y = x$
4. จุดยอดอยู่ที่จุด $(\sqrt{a}, \sqrt{a})$ และ $(-\sqrt{a}, -\sqrt{a})$
5. จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $(\sqrt{2a}, \sqrt{2a})$ และ$(-\sqrt{2a}, -\sqrt{2a})$
6. เส้นกำกับคือแกน X และแกน Y

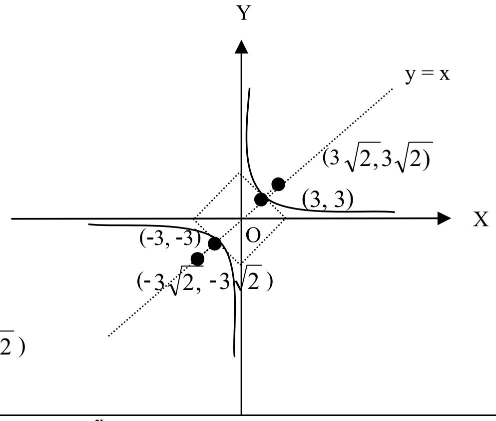


เช่น สมการไฮเพอร์โบลา $xy = 9$

1. เป็นกราฟไฮเพอร์โบลามุมฉาก
2. จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0)
3. แกนตามขวางอยู่บนเส้นตรง $y = x$
4. จุดยอดอยู่ที่จุด $(\sqrt{a}, \sqrt{a}) = (\sqrt{9}, \sqrt{9}) = (3,3)$

   และ $(-\sqrt{a}, -\sqrt{a}) = (-\sqrt{9}, -\sqrt{9}) = (-3,-3)$
5. จุดโพกัสอยู่ที่จุด $(\sqrt{2a}, \sqrt{2a}) = (\sqrt{2(9)}, \sqrt{2(9)}) = (3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

   และ $(-\sqrt{2a}, -\sqrt{2a}) = (-\sqrt{2(9)}, -\sqrt{2(9)}) = (-3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$
6. เส้นกำกับคือ แกน X และ แกน Y

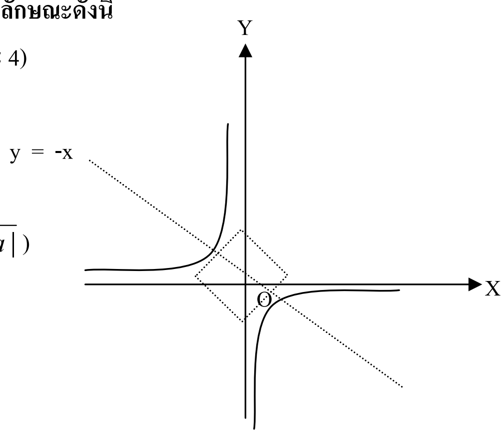


โดยทั่วไปสมการไฮเพอร์โบลาที่อยู่ในรูป $xy = a$ **เมื่อ** $a < 0$ **จะมีลักษณะดังนี้**

1. เป็นกราฟไฮเพอร์โบลามุมฉาก (กราฟอยู่ในควอดรันต์ที่2 และ 4)
2. จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0)
3. แกนตามขวางอยู่บนเส้นตรง $y = -x$
4. จุดยอดอยู่ที่จุด $(\sqrt{-a}, -\sqrt{-a})$ และ $(-\sqrt{-a}, \sqrt{-a})$

   หรือ$(\sqrt{|a|}, -\sqrt{|a|})$ และ $(-\sqrt{|a|}, \sqrt{|a|})$
5. จุดโพกัสอยู่ที่จุด $(\sqrt{-2a}, -\sqrt{-2a}$ และ $(-\sqrt{-2a}, \sqrt{-2a})$

   หรือ $(\sqrt{|2a|}, -\sqrt{|2a|})$ และ $(-\sqrt{|2a|}, \sqrt{|2a|})$
6. เส้นกำกับคือ แกน X และแกน Y

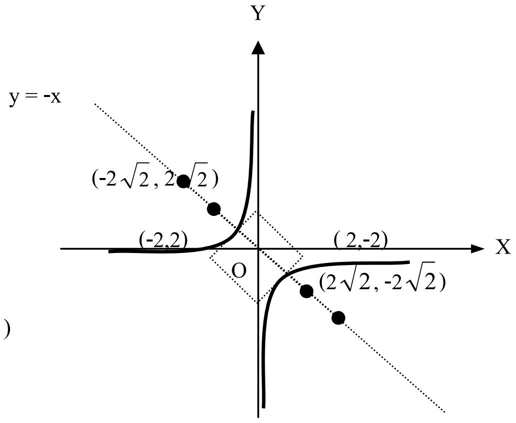


เช่น สมการไฮเพอร์โบลา $xy = -4$

1. เป็นกราฟไฮเพอร์โบลามุมฉาก
2. จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0)
3. แกนตามขวางอยู่บนเส้นตรง $y = -x$
4. จุดยอดอยู่ที่จุด$(\sqrt{|a|}, -\sqrt{|a|}) = (\sqrt{4}, -\sqrt{4}) = (2,-2)$

   และ $(-\sqrt{|a|}, \sqrt{|a|}) = (-\sqrt{4}, \sqrt{4}) = (-2,2)$
5. จุดโพกัสอยู่ที่จุด $(\sqrt{|2a|}, -\sqrt{|2a|}) = (\sqrt{8}, -\sqrt{8}) = (2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

   และ $(-\sqrt{|2a|}, \sqrt{|2a|}) = (-\sqrt{8}, \sqrt{8}) = (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$
6. เส้นกำกับคือ แกน X และแกน Y



sm.tm.

โดยทั่วไปสมการไฮเพอร์โบลาที่อยู่ในรูป $(x - h)(y - k) = a$ **เมื่อ** $a > 0$ **จะมีลักษณะดังนี้**

เป็นกราฟไฮเพอร์โบลามุมฉาก

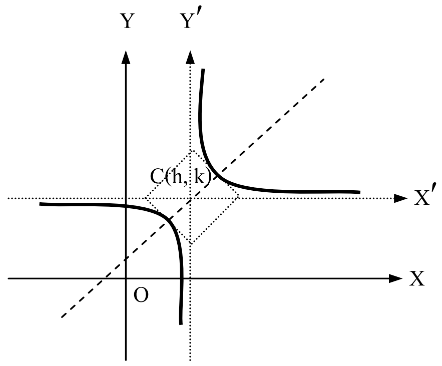
จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)

เส้นกำกับคือแกน X' (เส้นตรง $y = k$)และแกน Y'(เส้นตรง $x = h$)

จะได้สมการเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่คือ

$x'y' = a$ เมื่อ $a > 0$

เลื่อนแกนไปที่จุด (h, k) เขียนกราฟได้ดังรูป



เช่น จงเขียนกราฟของสมการ

(1) $(x - 2)(y + 3) = 7$

วิธีทำ จาก $(x - 2)(y + 3) = 7$

เป็นกราฟไฮเพอร์โบลามุมฉาก

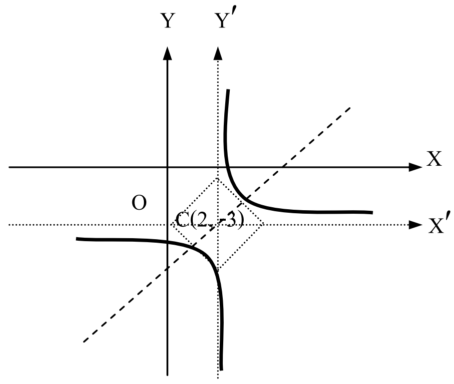
จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(2, -3)$

เส้นกำกับคือ แกน X' (เส้นตรง $y = -3$) และแกน Y'(เส้นตรง $x = 2$)

จะได้สมการเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่คือ

$x'y' = 7$

เลื่อนแกนไปที่จุด $(2, -3)$ เขียนกราฟได้ดังรูป



(2) $xy - 6x = 1$

วิธีทำ จาก $xy - 6x = 1$ จะได้ $x(y - 6) = 1$

เป็นกราฟไฮเพอร์โบลามุมฉาก

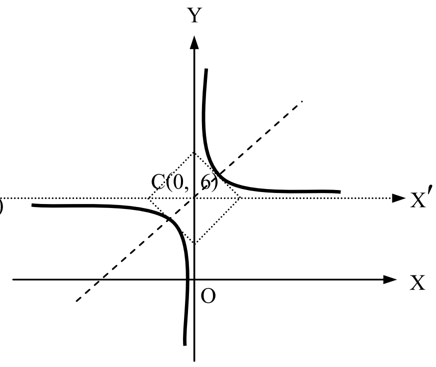
จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 6)$

เส้นกำกับคือ แกน X' (เส้นตรง $y = 6$) และแกน Y(เส้นตรง $x = 0$)

จะได้สมการเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่คือ

$x'y' = 1$

เลื่อนแกนไปที่จุด $(0, 6)$ เขียนกราฟได้ดังรูป



(3) $xy - 2y - 4x = 0$

วิธีทำ จาก $xy - 2y - 4x = 0$

จะได้ $y(x - 2) - 4x = 0$

$y(x - 2) - 4(x - 2) = 8$

$(x - 2)(y - 4) = 8$

เป็นกราฟไฮเพอร์โบลามุมฉาก

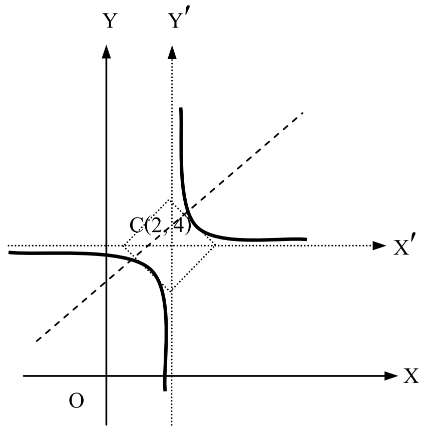
จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $C(2, 4)$

เส้นกำกับคือ แกน X' (เส้นตรง $y = 4$) และแกน Y' (เส้นตรง $x = 2$)

จะได้สมการเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่คือ

$x'y' = 8$

เลื่อนแกนไปที่จุด $(2, 4)$ เขียนกราฟได้ดังรูป



sm.tm.

โดยทั่วไปสมการไฮเพอร์โบลาที่อยู่ในรูป $(x - h)(y - k) = a$ **เมื่อ** $a < 0$ **จะมีลักษณะดังนี้**

เป็นกราฟไฮเพอร์โบลามุมฉาก

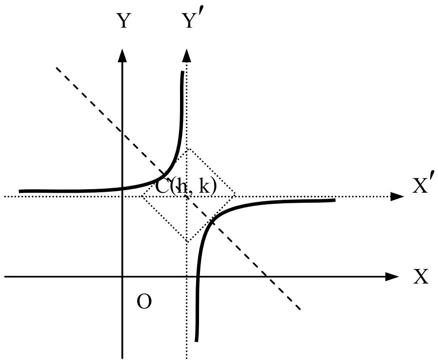
จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)

เส้นกำกับคือแกน X' (เส้นตรง $y = k$)และแกน Y'(เส้นตรง $x = h$)

จะได้สมการเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่คือ

$x'y' = a$ เมื่อ $a < 0$

เลื่อนแกนไปที่จุด (h, k) เขียนกราฟได้ดังรูป



เช่น จงเขียนกราฟของสมการ

(1) $(x - 2)(y + 3) = -4$

วิธีทำ จาก $(x - 2)(y + 3) = -4$

เป็นกราฟไฮเพอร์โบลามุมฉาก

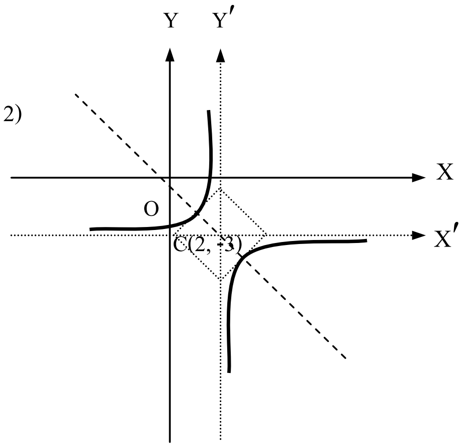
จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(2, -3)$

เส้นกำกับคือ แกน X' (เส้นตรง $y = -3$) และแกน Y'(เส้นตรง $x = 2$)

จะได้สมการเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่คือ

$x'y' = -4$

เลื่อนแกนไปที่จุด $(2, -3)$ เขียนกราฟได้ดังรูป



(2) $xy - 6x = -3$

วิธีทำ จาก $xy - 6x = -3$ จะได้ $x(y - 6) = -3$

เป็นกราฟไฮเพอร์โบลามุมฉาก

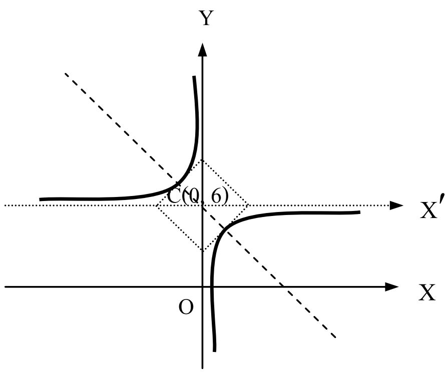
จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 6)$

เส้นกำกับคือ แกน X' (เส้นตรง $y = 6$) และแกน Y(เส้นตรง $x = 0$)

จะได้สมการเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่คือ

$x'y' = -3$

เลื่อนแกนไปที่จุด $(0, 6)$ เขียนกราฟได้ดังรูป



(3) $xy + 3y - 4x - 11 = 0$

วิธีทำ จาก $xy + 3y - 4x - 11 = 0$

จะได้ $y(x + 3) - 4x = 11$

$y(x + 3) - 4(x + 3) = 11 - 12$

$y(x + 3) - 4(x + 3) = -1$

$(x + 3)(y - 4) = -1$

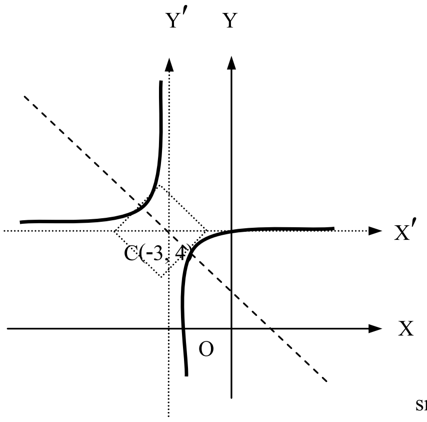
เป็นกราฟไฮเพอร์โบลามุมฉาก

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $C(-3, 4)$

เส้นกำกับคือ แกน X' (เส้นตรง $y = 4$) และแกน Y' (เส้นตรง $x = -3$)

จะได้สมการเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่คือ $x'y' = -1$

เลื่อนแกนไปที่จุด $(-3, 4)$ เขียนกราฟได้ดังรูป



sm.tm.

ใบงานที่ 1.11

1. จงบอกชื่อกราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

(1) $\{ (x, y) \mid 2x = 3y \}$

(2) $\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 1 \}$

(3) $\{ (x, y) \mid x^2 - y^2 = 1 \}$

(4) $\{ (x, y) \mid 2y^2 = 3x + 5 \}$

(5) $\{ (x, y) \mid 2x = \frac{3}{y} \}$

(6) $\{(x, y) \mid 2x^2 = 3y^2 - 12 \}$

(7) $\{ (x, y) \mid 2x = 3y + xy \}$

(8) $\{ (x, y) \mid 9y^2 - x^2 - 45 = 0 \}$

(9) $\{ (x, y) \mid 5x^2 + 10x + y^2 = 100 \}$

(10) $\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{5} = y \}$

2. จงหาสมการไฮเพอร์โบลาจากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1) ผลต่างของระยะจากไฮเพอร์โบลาจุดใดๆ บนไปยังจุด (-10, 0) และ (10, 0) เท่ากับ 16 หน่วย

(2) จุดโฟกัสอยู่ที่ (0, -4) และ (0, 4) และผลต่างคงตัวเท่ากับ 4 หน่วย

(3) จุดยอดอยู่ที่ (-3, 0) และ (3, 0) และจุดโฟกัสอยู่ที่ (-5, 0) และ (5, 0)

(4) จุดโฟกัสอยู่ที่ (0, -6) และ (0, 6) และแกนสังยุคยาว 10 หน่วย

sm.tm

(5) จุดยอดอยู่ที่ $(0, -\sqrt{10})$ และ $(0, \sqrt{10})$ และไฮเพอร์โบลาผ่านจุด $(2, 5)$

(6) จุดโฟกัสอยู่ที่ $(-3, 0)$ และ $(3, 0)$ และ $e = 3$

(7) จุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$ จุดยอดจุหนึ่งอยู่ที่ $(0, -4)$ และโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(0, -5)$

(8) จุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$ แกนตามขวางอยู่บนแกน X ซึ่งยาว 8 หน่วย และแกนสังยุคยาว 6 หน่วย

(9) จุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, -4)$ และ $(0, 4)$ และ $e = \frac{3}{2}$

sm.tm

3. จากสมการไฮเพอร์โบลาในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนสังยุค ความยาวลาตัสเรกตัม สมการเส้นกำกับ พร้อมทั้งเขียนเขียนกราฟ

(1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$

(2) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{25}=1$

(3) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$

sm.tm

(4) $4x^2 - 9y^2 = 36$

(5) $y^2 - 4x^2 - 100 = 0$

(6) $5x^2 - 2y^2 + 4 = 0$

sm.tm

3. จงหาสมการไฮเพอร์โบลาจากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1) ผลต่างของระยะจากจุดใดๆบนไฮเพอร์โบลาไปยังจุด (-3, 2) และ (3, 2) เท่ากับ 4 หน่วย

(2) ผลต่างของระยะจากจุดใดๆบนไฮเพอร์โบลาไปยังจุด (-1, -1) และ (7, -1) เท่ากับ 6 หน่วย

(3) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (2, 3) จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (6, 3) และจุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (7, 3)

(4) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (4, -5) โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (4, -2) แกนตามขวางยาว 4 หน่วย

(5) จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (4, 3) โฟกัสอยู่ที่ (6, 3) และ (-6, 3)

(6) จุดยอดอยู่ที่ (-1, -3) และ (-1, 5) และกราฟผ่านจุด (-3, -5)

sm.tm

4. จากสมการไฮเพอร์โบลาในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนสังยุค ความยาวลาตัสเรกตัม สมการเส้นกำกับ พร้อมทั้งเขียนกราฟเขียนกราฟ

(1) $\dfrac{(x-2)^2}{25}-\dfrac{(y+1)^2}{16}=1$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

(2) $25(y+3)^2 - 9(x-1)^2 - 225 = 0$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

(3) $9x^2 - 16y^2 - 36x - 96y + 36 = 0$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....sm.tm

(4) $4y^2 - 100x^2 + 1000x - 24y = 2864$

(5) $x^2 - 4y^2 + 2x + 16y + 1 = 0$

(6) $9x^2 - 4y^2 - 54x - 16y + 29 = 0$

(7) $9y^2 - 16x^2 + 32x - 36y - 124 = 0$

(8) $7x^2 - 9y^2 + 56x - 18y + 166 = 0$

(9) $7x^2 - 9y^2 + 28x - 72y - 179 = 0$

5. จงเขียนกราฟของสมการไฮเพอร์โบลาต่อไปนี้

(1) $xy = 16$

(2) $x(y + 3) = -8$

(3) $(x + 2)(y - 5) = -4$

(4) $xy + 5y + 3x = 0$

(5) $xy - 3x + 2y + 1 = 0$

sm.tm

ผู้ดำเนินการ

ที่ปรึกษา :

ดร.อำรุง จันทวานิช	เลขาธิการสภาการศึกษา
ดร.สิริพร บุญญานันต์	รองเลขาธิการสภาการศึกษา
รศ.ดร.สำอาง หิรัญบูรณะ	ข้าราชการบำนาญ ที่ปรึกษาโครงการฯ
ดร.รุ่งเรือง สุขาภิรมย์	ผู้ตรวจราชการกระทรวงศึกษาธิการ ที่ปรึกษาโครงการฯ
นางสาวสุทธาสินี วัชรบูล	ที่ปรึกษาด้านระบบการศึกษา สกศ.
ดร.จิรพรรณ ปุณเกษม	ผู้อำนวยการสำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้

ผู้เรียบเรียง :

นายสมหมาย ทองเมือง โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้ จังหวัดนครศรีธรรมราช

ผู้ตรวจทาน :

รองศาสตราจารย์อาริสา รัตนเพ็ชร์ หัวหน้าคณะวิจัย

ดร.ศุภวรรณ เลิศไกร

อาจารย์เอธัสวัฒน์ คำมณี

อาจารย์สุธิตา มณีชัย

คณะอาจารย์ผู้สอนคณิตศาสตร์โรงเรียนที่เข้าร่วมโครงการฯ จากโรงเรียนดังต่อไปนี้

- โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย จังหวัดสงขลา
- โรงเรียนมหาวชิราวุธ จังหวัดสงขลา
- โรงเรียนบูรณะรำลึก จังหวัดตรัง
- โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย จังหวัดสตูล
- โรงเรียนสุราษฎร์ธานี จังหวัดสุราษฎร์ธานี
- โรงเรียนพุนพินพิทยาคม จังหวัดสุราษฎร์ธานี
- โรงเรียนเตรียมอุดมภาคใต้ จังหวัดนครศรีธรรมราช

ผู้พิจารณารายงาน :

นายไมตรี ศรีทองแท้ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพฯ

ผู้รับผิดชอบโครงการ :

นางสาวบุญเทียม ศิริปัญญา	หัวหน้าโครงการ
นายรวิช ตาแก้ว	ประจำโครงการ
นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา	ประจำโครงการ
นายศิริรัตน์ ชำนาญกิจ	ประจำโครงการ

บรรณาธิการ :

นางสาวบุญเทียม ศิริปัญญา

นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา

เรียบเรียงและจัดทำรายงาน :

นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา

เพื่อเป็นการใช้ทรัพยากรของชาติให้คุ้มค่า
หากท่านไม่ใช้หนังสือเล่มนี้แล้ว
โปรดมอบให้ผู้อื่นนำมาใช้ประโยชน์ต่อไป

กลุ่มพัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษ
สำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้
สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา (สกศ.)
99/20 ถนนสุโขทัย เขตดุสิต กรุงเทพฯ 10300
โทรศัพท์ : 0-2668-7123 ต่อ 2530
โทรสาร : 0-2243-1129, 0-2668-7329
เว็บไซต์ : http://www.onec.go.th
http://www.thaigifted.org

บันทึก