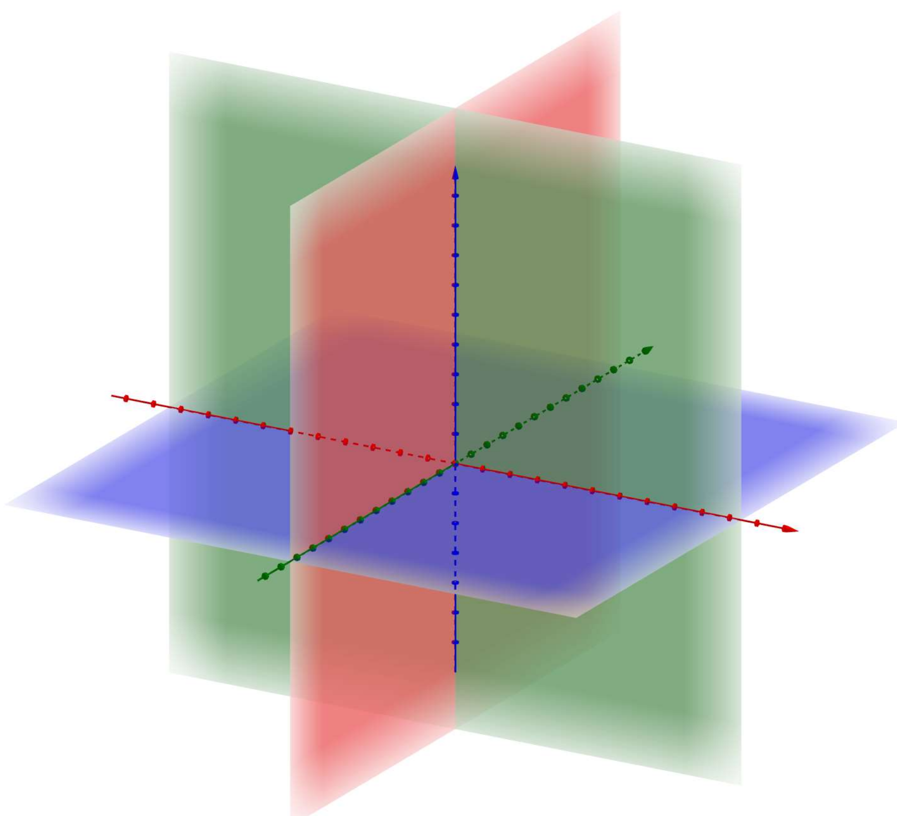
บทที่ 6

เรขาคณิตวิเคราะห์เชิงทรงตัน (Solid Analytic Geometry)

ในการศึกษาเรขาคณิตวิเคราะห์ในปริภูมิ 3 มิติ เป็นการขยายแนวคิดที่ได้จากการศึกษาเรขาคณิตวิเคราะห์ในระนาบ 2 มิติ ระบบพิกัดฉาก 3 มิติ ประกอบไปด้วยระนาบ 3 แผ่น ตั้งฉากซึ่งกันและกัน เรียกว่า ระนาบพิกัด (Coordinate Planes) ได้แก่ ระนาบ XY ระนาบ XZ และระนาบ YZ ระนาบทั้งสามตัดกันในแนวตั้งฉาก รอยตัดเกิดเป็นเส้นตรง 3 เส้น ตั้งฉากซึ่งกันและกัน เรียกว่าแกนพิกัด (Coordinate Axes) คือ แกน X แกน Y และแกน Z แกนทั้งสามตัดกันที่จุด O เรียกว่าจุดกำเนิด (Origin) ระนาบพิกัดแบ่งปริภูมิ 3 มิติ ออกเป็น 8 อัฐภาค (Octant) ดังรูป



ระบบพิกัดฉาก 3 มิติ

6.1 จุดในปริภูมิ 3 มิติ (The Point in Three-Dimensional Space)

แกนพิกัดทั้งสามตัดกันทำให้เกิดระนาบพิกัด (Coordinate Planes) ดังนี้

ระนาบ XY (แนวนอน) เมื่อ $z = 0$

ระนาบ YZ (แนวตั้ง) เมื่อ $x = 0$ และ

ระนาบ XZ (แนวตั้ง) เมื่อ $y = 0$

จุด $P(x, y, z)$ ในปริภูมิ 3 มิติ เรียกว่า พิกัดฉาก (Rectangular Coordinates) ถ้า

x เป็นระยะห่างที่มีเครื่องหมายจากระนาบ YZ

y เป็นระยะห่างที่มีเครื่องหมายจากระนาบ XZ และ

z เป็นระยะห่างที่มีเครื่องหมายจากระนาบ XY

ในกรณีนี้เราจะพิจารณาตำแหน่งของจุด P ซึ่งเราเรียกว่าจุด $P(x, y, z)$ ซึ่งมีการจับคู่หนึ่งต่อหนึ่งระหว่างสามลำดับ (x, y, z) ของจำนวนจริง กับจุด P เราเรียกระบบนี้ว่า ระบบพิกัดฉาก (Rectangular Coordinate System) ใน 3 มิติ มีตำแหน่งอยู่ในอัฐภาคที่ 1 (First Octant) ซึ่งเป็นหนึ่งในแปดของปริภูมิ 3 มิติ แกนพิกัดทั้งสามมีค่าเป็นบวก

ตัวอย่างที่ 6.1.1 จงแสดงขั้นตอนการลงจุดซึ่งมีพิกัดเป็น $A(-3,4,1), B(3,-2,4)$ และ $C(2,3,-4)$

ตัวอย่างที่ 6.1.2 จงแสดงขั้นตอนเขียนระนาบของ $z = 2$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่างที่ 6.1.3 จงแสดงขั้นตอนเขียนระนาบของ $x + z = 4$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่างที่ 6.1.4 จงแสดงขั้นตอนเขียนระนาบของ $2y + 3z = 6$

ตัวอย่างที่ 6.1.5 จงแสดงขั้นตอนเขียนระนาบของ $x + y + z = 2$

6.1.1 ระยะทางระหว่างจุดสองจุด (Distance Between Two Points)

ทฤษฎีบท 6.1.1 ให้ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ และ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ เป็นจุดสองจุดใด ๆ ระยะทางระหว่างจุดสองจุด เขียนแทนด้วย $\left|P_1P_2\right|$ คือ

$$\left|P_1P_2\right| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่างที่ 6.1.1.1 จงหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด $A(0,0,0)$ และจุด $B(4,3,0)$

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่างที่ 6.1.1.2 จงหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด $A(-1,2,3)$ และจุด $B(4,0,2)$

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่างที่ 6.1.1.3 จงหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด $A(-4,4,1)$ และจุด $B(-3,5,-4)$

....

....

....

....

....

....

....

6.1.2 จุดกึ่งกลางและจุดแบ่งส่วนของส่วนของเส้นตรง

ทฤษฎีบท 7.1.2.1 ถ้า $P(x,y,z)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $P_1(x_1,y_1,z_1)$ และจุด $P_2(x_2,y_2,z_2)$ แล้วจะได้ว่า

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

ทฤษฎีบท 6.1.2.2 ถ้า $P(x,y,z)$ แบ่งส่วนของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $P_1(x_1,y_1,z_1)$ และ $P_2(x_2,y_2,z_2)$ ออกเป็นอัตราส่วน $r=\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ แล้วจะได้ว่า

$$x=x_1+r(x_2-x_1)$$
$$y=y_1+r(y_2-y_1)$$
$$z=z_1+r(z_2-z_1)$$

ตัวอย่างที่ 6.1.2.1 จงหาจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด $A(1,2,3)$ และ $B(3,-4,1)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่างที่ 6.1.2.2 จงหาจุดแบ่งส่วนของส่วนของเส้นตรงซึ่งแบ่งส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด $A(1,3,-2)$ และ $B(7,6,1)$ ออกเป็นอัตราส่วน $1:3$

ตัวอย่างที่ 6.1.2.3 ให้ $A(1,4,7)$ และ $B(5,-1,11)$ จงหาจุด P ซึ่งแบ่งส่วนของเส้นตรงโดยที่อัตราส่วนของ $\overline{AP}:\overline{PB}$ เท่ากับ $2:3$

6.2 เส้นตรงในปริภูมิ 3 มิติ (The Line in Three-Dimensional Space)

ในหัวข้อนี้ เราต้องการหาสมการของเส้นตรงในปริภูมิ 3 มิติ โดยใช้เวกเตอร์ในการพิจารณา สมการเส้นตรง ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\vec{v} = \left\langle a, b, c \right\rangle$ ถ้า $P(x, y, z)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง L จะได้เวกเตอร์ $\vec{r}$ ซึ่งเชื่อมจุดกำเนิดกับจุด P มีส่วนประกอบเป็น $\vec{r} = \left\langle x, y, z \right\rangle$ และเวกเตอร์ $\vec{r}_0$ ซึ่งเชื่อมจุดกำเนิดกับจุด P_0 มีส่วนประกอบเป็น $\vec{r}_0 = \left\langle x_0, y_0, z_0 \right\rangle$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 6.2.1 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_0(1,2,3)$ ขนานกับเวกเตอร์ $\vec{v} = \left\langle 3,-4,7 \right\rangle$ และหาจุดที่เส้นตรงนี้ตัดกับระนาบ XY

ตัวอย่าง 6.2.2 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $A(2,4,-1)$ และจุด $B(5,0,7)$ และพิจารณาว่าเส้นตรงนี้ผ่านจุด $(1,2,3)$ และผ่านจุด $(8,-4,15)$ หรือไม่

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 6.2.3 กำหนดสมการเส้นตรง L_1 และ L_2 ดังนี้

$$L_1 : x = 1 - t,\ y = 1 + t,\ z = 1 + 2t$$

และ $$L_2 : x = 2s,\ y = 2 + s,\ z = 3 - 3s$$

โดยที่ t และ s เป็นพารามิเตอร์ จงหาจุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 6.2.4 กำหนดเส้นตรง L_1 และ L_2 ดังนี้ $L_1 : x = 1 + 4t,\ y = 5 - 4t,\ z = -1 + 5t$ และ $L_2 : x = 2 + 8t,\ y = 4 - 3t,\ z = 5 + t$ โดยที่ $t \in R$

ก. เส้นตรง L_1 และ L_2 ขนานกันหรือไม่ ข. เส้นตรง L_1 และ L_2 ตัดกันหรือไม่

6.2.1 ระยะทางจากจุดมายังเส้นตรงในปริภูมิสามมิติ

ทฤษฎีบท 6.2.1 ให้ d เป็นระยะตั้งฉากจากจุด Q มายังเส้นตรง L จุด P เป็นจุดหนึ่งบนเส้นตรง L เวกเตอร์ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกับเส้นตรง L เราจะได้ว่า

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \times \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 6.2.1.1 จงหาระยะทางจากจุด $(1,1,5)$ ไปยังเส้นตรง $L: x = 1+t,\ y = 3-t,\ z = 2t$

6.3 ระนาบในปริภูมิ 3 มิติ

การประยุกต์ของผลคูณเชิงสเกลาร์ที่สำคัญในทางเรขาคณิตวิเคราะห์ในปริภูมิ 3 มิติอีกอย่างหนึ่งก็คือ สามารถใช้หาสมการของระนาบโดยกำหนดเงื่อนไข ดังนี้ จุดหนึ่งจุดและเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับระนาบหรือจุดสามจุดบนระนาบที่ไม่ได้อยู่บนระนาบเดียวกัน

ทฤษฎีบท 6.3.1 ถ้าระนาบ S ผ่านจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ จุด $P(x,y,z)$ เป็นจุดใด ๆ บนระนาบ S และระนาบ S ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{n} = \left\langle a,b,c \right\rangle$ แล้วสมการรูปทั่วไปของสมการระนาบ คือ

$$ax + by + cz + d = 0$$

เมื่อ a, b, c และ d เป็นค่าคงที่ โดยที่ a, b และ c ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

ตัวอย่าง 6.3.1 จงหาสมการระนาบ S ที่ผ่านจุด $(3,0,7)$ และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{n} = \left\langle 4,2,-5 \right\rangle$

ตัวอย่างที่ 6.3.2 จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด $A(1,2,3)$, $B(-1,4,5)$, $C(0,1,-6)$

ตัวอย่าง 6.3.3 จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด $(1,-2,3)$ และตั้งฉากกับเวกเตอร์ที่ขนานกับรอยตัดของระนาบ $x-2y+3z=-1$ และ $3x+y=5$

6.3.1 มุมระหว่างระนาบ

บทนิยาม 6.3.1 ให้ $\vec{N}_1$ และ $\vec{N}_2$ เป็น Normal Vector ของระนาบ S_1 และระนาบ S_2 ตามลำดับ มุมระหว่างระนาบ S_1 และระนาบ S_2 หมายถึงมุมระหว่าง $\vec{N}_1$ และ $\vec{N}_2$ โดยที่

$$\cos\theta = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|\left|\vec{N}_2\right|}$$

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 6.3.1.1 จงหามุมระหว่างระนาบ $5x-2y+5z=12$ และระนาบ $2x+y-7z=-11$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6.3.2 เส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ

ระนาบสองระนาบถ้าไม่ขนานกันจะต้องตัดกันเสมอ และรอยตัดของทั้งสองระนาบเป็นเส้นตรงใน 3 มิติ ถ้าให้ $\vec{N}_1$ และ $\vec{N}_2$ เป็น Normal Vector จะได้ว่า $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ จะเป็นเวกเตอร์ที่ขนานกับสมการที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 6.3.2.1 จงหาสมการเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ $4x-2y+4z-10=0$ และระนาบ $3x-6y-2z-2=0$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6.3.3 ระยะทางจากจุดไปยังระนาบ

ทฤษฎีบท 6.3.3 ระยะทางระหว่างจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ กับระนาบ $ax + by + cz + d = 0$ คือ

$$D = \frac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 6.3.3.1 จงหาระยะตั้งฉากจากจุด $(2,-3,1)$ กับระนาบ $2x-3y-6z-14=0$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 6.3.3.2 จงหาระยะตั้งฉากจากจุด $(5,-3,3)$ กับระนาบ $2x-y+2z+5=0$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6.3.4 ระยะทางระหว่างระนาบที่ขนานกันสองระนาบ

ทฤษฎีบท 6.3.4 ระยะห่างระหว่างระนาบ $ax + by + cz + d_1 = 0$ กับระนาบ $ax + by + cz + d_2 = 0$ คือ

$$D = \frac{\left|d_1 - d_2\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

ตัวอย่าง 6.3.4.1 จงหาระยะห่างระหว่างระนาบ $2x-3y+6z+1=0$ กับระนาบ $2x-3y+6z+15=0$

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 6.3.4.2 จงหาระยะห่างระหว่างระนาบ $x+2y-2z=-3$ และ $x+2y-2z=15$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6.4 การพิจารณาลักษณะของพื้นผิว

พื้นผิวกำลังสองเป็นพื้นผิวในปริภูมิ 3 มิติ ซึ่งอยู่ในเทอมของ x, y และ z ซึ่งมีรูปทั่วไปเป็น

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

เมื่อ $A, B, C, ..., J$ เป็นค่าคงที่ ในการศึกษาพื้นผิวกำลังสอง เราจะพิจารณาดังนี้

- จุดตัดของพื้นผิวกับแกนพิกัด
- การสมมาตรของพื้นผิว
- รอยตัดของพื้นผิว
- ขอบเขตของพื้นผิว

6.4.1 จุดตัดของพื้นผิวกับแกนพิกัด (Intercept)

ในการพิจารณาจุดตัดของพื้นผิวกับแกนพิกัด X, Y และ Z สามารถทำได้ดังนี้

พิจารณาจุดตัดแกน X ให้แทนค่า $y = 0$ และ $z = 0$ ในสมการพื้นผิว

พิจารณาจุดตัดแกน Y ให้แทนค่า $x = 0$ และ $z = 0$ ในสมการพื้นผิว

พิจารณาจุดตัดแกน Z ให้แทนค่า $x = 0$ และ $y = 0$ ในสมการพื้นผิว

ตัวอย่าง 6.4.1 กำหนดสมการพื้นผิว $2x^2 + y^2 + 2z^2 = 8$ จงหาจุดตัดแกน X, Y และ Z

ตัวอย่าง 6.4.2 กำหนดสมการพื้นผิว $z = x^2 + 2y^2$ จงหาจุดตัดแกน X, Y และ Z

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 6.4.3 กำหนดสมการพื้นผิว $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} - \frac{z^2}{25} = 1$ จงหาจุดตัดแกน X, Y และ Z

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6.4.2 การสมมาตรของพื้นผิว (Symmetry)

ในการพิจารณาการสมมาตรนั้นมี 3 ลักษณะ คือ

- สมมาตรกับจุดกำเนิด
- สมมาตรกับแกนพิกัด
- สมมาตรกับระนาบพิกัด

6.4.2.1 สมมาตรกับจุดกำเนิด

ให้ $S=\{(x,y,z)\big|f(x,y,z)=0\}$ เป็นพื้นผิวแล้ว S จะมีสมมาตรกับจุดกำเนิด ก็ต่อเมื่อถ้า $(x,y,z)\in S$ แล้ว $(-x,-y,-z)\in S$

6.4.2.2 สมมาตรกับแกนพิกัด

S จะสมมาตรกับแกน X ก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x,y,z)\in S$ แล้ว $(x,-y,-z)\in S$

S จะสมมาตรกับแกน Y ก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x,y,z)\in S$ แล้ว $(-x,y,-z)\in S$

S จะสมมาตรกับแกน Z ก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x,y,z)\in S$ แล้ว $(-x,-y,z)\in S$

6.4.2.3 สมมาตรกับระนาบพิกัด

S จะสมมาตรกับระนาบ XY ก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x,y,z)\in S$ แล้ว $(x,y,-z)\in S$

S จะสมมาตรกับระนาบ XZ ก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x,y,z)\in S$ แล้ว $(x,-y,z)\in S$

S จะสมมาตรกับระนาบ YZ ก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x,y,z)\in S$ แล้ว $(-x,y,z)\in S$

ตัวอย่าง 6.4.2.1 กำหนดให้สมการพื้นผิว $z=2x^2+3y^2$ จงพิจารณาการสมมาตร

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 6.4.2.1 กำหนดให้สมการพื้นผิว $z^2 = x^2 + 4y^2$ จงพิจารณาการสมมาตร

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6.4.3 รอยตัดของพื้นผิว (Trace)

บทนิยาม 8.1.3 ให้ $S = \{(x,y,z) \big| f(x,y,z) = 0\}$ เป็นพื้นผิวแล้ว

รอยตัดของ S โดยระนาบ $x = k$ คือเส้นโค้ง $f(k,y,z) = 0$

รอยตัดของ S โดยระนาบ $y = k$ คือเส้นโค้ง $f(x,k,z) = 0$

รอยตัดของ S โดยระนาบ $z = k$ คือเส้นโค้ง $f(x,y,k) = 0$

ตัวอย่าง 6.4.3.1 กำหนดสมการพื้นผิว $2z = x^2 + 4y^2$ จงพิจารณารอยตัดของพื้นผิว

ตัวอย่าง 6.4.3.2 กำหนดสมการพื้นผิว $x^2 = 3y^2 + 2z^2 - 1$ จงพิจารณารอยตัดของพื้นผิว

6.4.4 ขอบเขตของพื้นผิว (Asymptote)

สำหรับการหาค่าขอบเขตของพื้นผิวนั้น เราจะเอาค่าที่เป็นไปได้ทุกค่าที่เป็นจำนวนจริงของ x, y และ z ซึ่งค่าเหล่านี้คือขอบเขตของ x, y, z นั่นเอง

> **บทนิยาม 8.1.4** กำหนดสมการพื้นผิว S คือ $f(x,y,z)=0$
>
> ขอบเขตของ $x = \{x \mid \exists y, z \in R, f(x,y,z)=0\}$
>
> ขอบเขตของ $y = \{y \mid \exists x, z \in R, f(x,y,z)=0\}$
>
> ขอบเขตของ $z = \{z \mid \exists x, y \in R, f(x,y,z)=0\}$

ตัวอย่าง 6.4.4.1 จงหาขอบเขตของพื้นผิว $\sqrt{9-x^2-y^2}=z$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

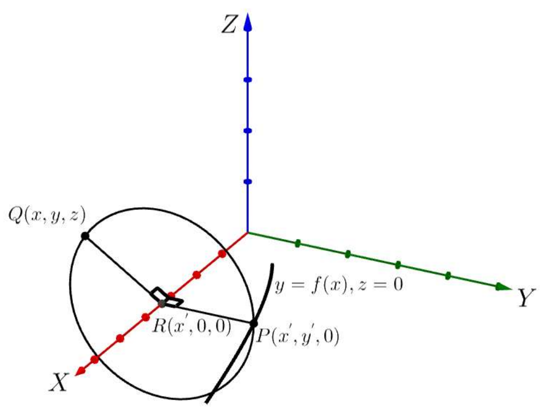
ตัวอย่าง 6.4.4.2 จงหาขอบเขตของพื้นผิว $10z = 10 + x^2 - y^2$

ตัวอย่าง 6.4.4.3 จงอธิบายลักษณะของพื้นผิว $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$

6.5 พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง

บทนิยาม 6.5 พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง คือ พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้งบนระนาบรอบเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่ง ที่อยู่บนระนาบนั้น

ในที่นี้จะศึกษาสมการของพื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง สมมติเส้นโค้ง C มีสมการ $y = f(x),\, z = 0$ เป็นเส้นโค้งบนระนาบ XY ดังรูป หมุนรอบแกน X พื้นผิวในรูป คือพื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง C รอบแกน X เราเรียก เส้นตรงคงที่บนระนาบในนิยามที่ 6.5 ว่า แกนของพื้นผิว



แสดงเส้นโค้ง $y = f(x), z = 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่างที่ 6.5.1 จงหาสมการของพื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $x = y^2$, $z = 0$ รอบแกน X

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่างที่ 6.5.2 จงหาสมการของพื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $3z + 4y = 12$, $x = 0$ รอบแกน Y

....

....

....

....

....

....

....

....

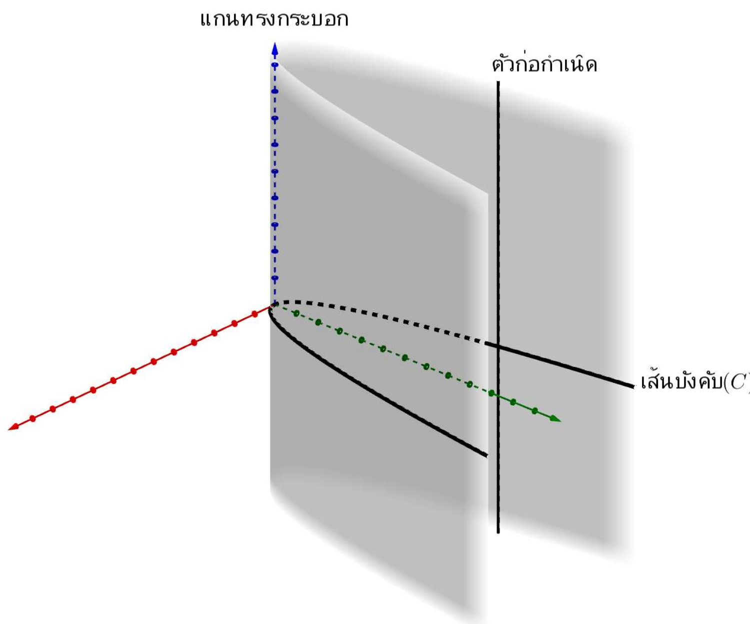
....

....

....

6.6 ทรงกระบอก (Cylinder)

บทนิยาม 6.6 ให้ C เป็นเส้นโค้งเส้นหนึ่ง และ L เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง (ซึ่งไม่ได้อยู่บนระนาบเดียวกับเส้นโค้ง) เซตของจุดที่อยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง L และตัดเส้นโค้ง C เรียกว่า ทรงกระบอก (Cylinder) เรียกเส้นโค้ง C ว่าเส้นบังคับ (Directrix) เรียกเส้นตรงแต่ละเส้นที่ขนานกับเส้นตรง L และผ่านเส้นโค้ง C ว่า ตัวก่อกำเนิด (Generatrix) และตัวก่อกำเนิดแต่ละเส้น เป็นสมาชิกของทรงกระบอก เรียกเส้นตรง L ว่า แกนของทรงกระบอก



แสดงส่วนประกอบของทรงกระบอก

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 6.6.1 จงหาสมการของทรงกระบอกที่มีเส้นบังคับเป็นเส้นโค้ง $x=(y-1)^2-10,\ z=0$ และตัวก่อกำเนิดขนานกับเวกเตอร์ $\vec{u}=\left\langle -2,\,1,\,3\right\rangle$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

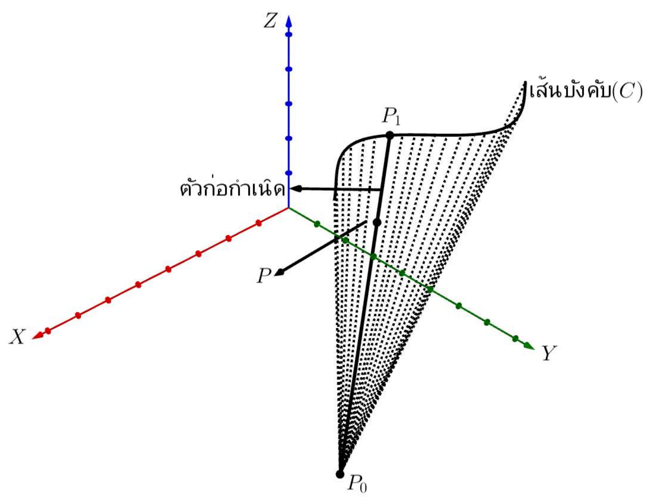
....

ตัวอย่าง 6.6.2 จงหาสมการของทรงกระบอกที่มีเส้นบังคับเป็นเส้นโค้ง $\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{16}=1, x=0$ และตัวก่อกำเนิดขนานกับเวกเตอร์ $\vec{u}=\left\langle 4,\,1,\,0\right\rangle$

6.7 กรวย (Cone)

บทนิยาม 6.6 ให้ C เป็นเส้นโค้งเส้นหนึ่ง P_0 เป็นจุดคงที่จุดหนึ่ง เซตของจุดที่อยู่บนเส้นตรงทุกเส้นที่ลากผ่านจุด P_0 และตัดกับเส้นโค้ง C เรียกว่า กรวย (Cone) เรียกเส้นโค้ง C ว่า เส้นบังคับ (Directrix) เรียกจุด P_0 ว่า จุดยอด (Vertex) เรียกเส้นตรงแต่ละเส้นที่ผ่านจุด P_0 และตัดเส้นโค้ง C ว่า ตัวก่อกำเนิด (Generatrix) และกล่าวว่า ตัวก่อกำเนิดเป็นสมาชิกของกรวย

กรวยในรูป เป็นพื้นผิวที่มีเส้นโค้ง C เป็นเส้นบังคับและจุด P_0 เป็นจุดยอด ส่วนของเส้นตรง P_0P_1 เป็นตัวก่อกำเนิดหนึ่งของกรวย



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 6.7.1 จงหาสมการของกรวยซึ่งมีจุดยอดที่ $P_0(0,0,10)$ และสมการของเส้นบังคับร่วมเป็น $x^2 + y^2 = 9,\ z = 0$

ตัวอย่าง 6.7.2 จงหาสมการของกรวยซึ่งมีจุดยอดที่ $P_0(0,1,2)$ และสมการของเส้นบังคับร่วมเป็น $(z-1)^2 = 4y,\, x = 3$

6.8 ผิวกำลังสอง (Quadric Surface)

พื้นผิวกำลังสอง คือ พื้นผิวของสมการกำลังสองของสามตัวแปร x, y และ z ที่มีความสัมพันธ์กันในรูปทั่วไป ดังนี้

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

เมื่อ A, B, C, D, E และ F ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน และพื้นผิวนั้นไม่เป็นเซตว่าง จุด เส้นตรง หรือระนาบ

> **หมายเหตุ** จุด เส้นตรง และระนาบ เรียกว่าภาคตัดกรวยลดรูป (Degenerate Conic)

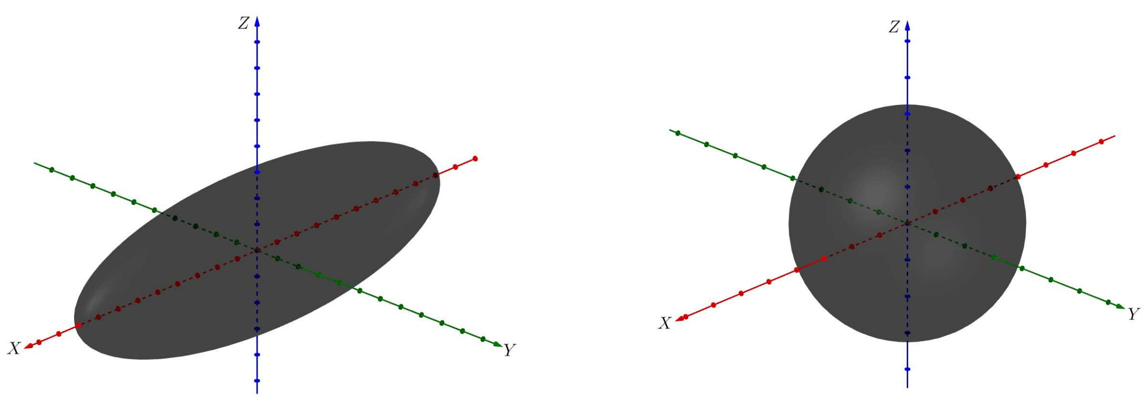
พื้นผิวที่เกิดจากสมการพื้นผิวกำลังสอง ที่ไม่ใช่ภาคตัดกรวยลดรูป มีทั้งหมด 9 แบบซึ่งขึ้นอยู่กับค่าคงที่ $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ และ J ดังนี้

6.8.1 ทรงรี (Ellipsoid)

ทรงรี คือ ผิวกำลังสอง ที่มีสมการในรูปมาตรฐาน เป็นดังนี้

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

เมื่อ x_0, y_0, z_0, a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ เรียกจุด (x_0, y_0, z_0) ว่าจุดศูนย์กลางของทรงรี ถ้า $a = b = c$ ทรงรีมีชื่อเฉพาะว่า **ทรงกลม (Sphere)**



ทรงรี

ตัวอย่าง 6.8.1 จงวาดกราฟของทรงรีที่มีสมการทั่วไปคือ $(x+1)^2+9(y-5)^2+16z^2=144$

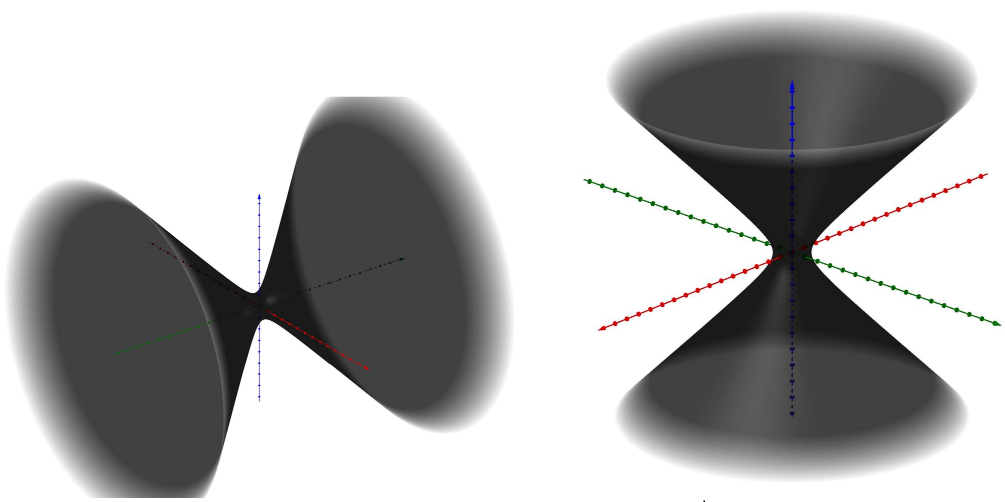
ตัวอย่าง 6.8.2 จงวาดกราฟของทรงรีที่มีสมการทั่วไปคือ $9x^2+4y^2+z^2-8y+4z=28$

6.8.2 ทรงไฮเพอร์โบลาเชิงวงรีแบบเชื่อมโยง (Elliptic Hyperboloid of One Sheet)

ทรงไฮเพอร์โบลาเชิงวงรีแบบเชื่อมโยง คือ ผิวกำลังสอง ที่มีสมการในรูปมาตรฐานแบบใดแบบหนึ่ง ดังต่อไปนี้

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$
$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

เมื่อ x_0, y_0, z_0, a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ



กราฟของทรงไฮเพอร์โบลาเชิงวงรีแบบเชื่อมโยง

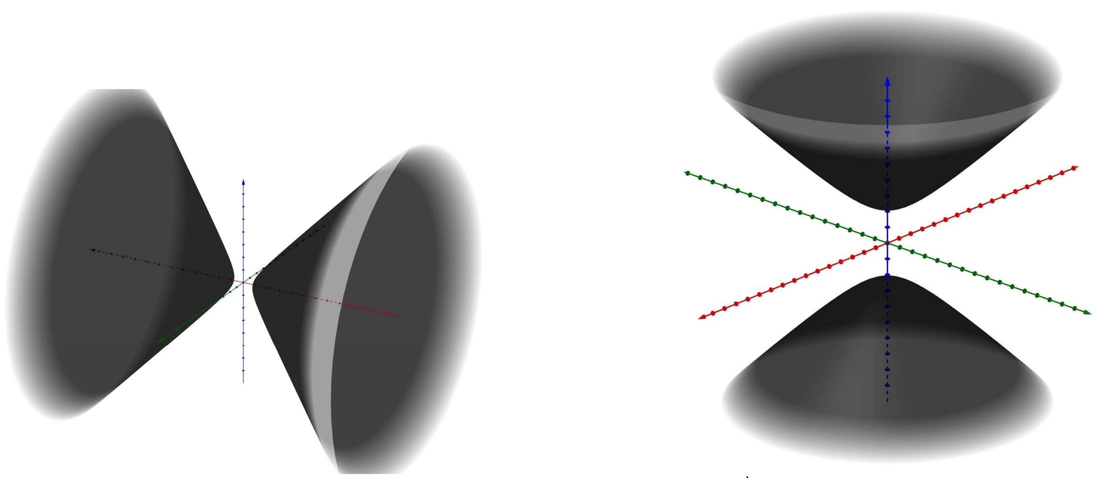
ตัวอย่าง 6.8.2 จงวาดกราฟของทรงไฮเพอร์โบลาเชิงวงรีแบบเชื่อมโยง ที่มีสมการทั่วไปคือ $2x^2-2y^2+z^2-12x+20y-2z=33$

6.8.3 ทรงไฮเพอร์โบลาเชิงวงรีแบบไม่เชื่อมโยง (Elliptic Hyperboloid of Two Sheet)

ทรงไฮเพอร์โบลาเชิงวงรีแบบไม่เชื่อมโยง คือ ผิวกำลังสอง ที่มีสมการในรูปมาตรฐานแบบใดแบบหนึ่งดังต่อไปนี้

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1$$
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1$$
$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1$$

เมื่อ x_0, y_0, z_0, a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ



กราฟของทรงไฮเพอร์โบลาเชิงวงรีแบบไม่เชื่อมโยง

ตัวอย่าง 6.8.3 จงวาดกราฟของทรงไฮเพอร์โบลาเชิงวงรีแบบไม่เชื่อมโยง ที่มีสมการทั่วไปคือ

$x^2-4y^2-16z^2-4x-8y=1$

....

....

....

....

....

....

....

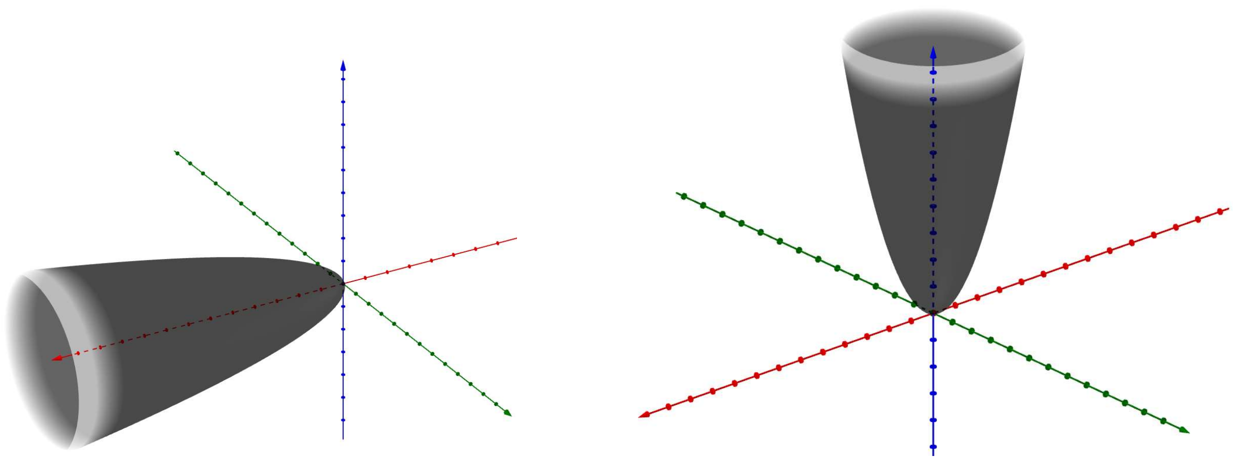
....

6.8.4 ทรงพาราโบลาเชิงวงรี (Elliptic Paraboloid)

ทรงพาราโบลาเชิงวงรี คือ ผิวกำลังสองที่มีสมการในรูปมาตรฐานแบบใดแบบหนึ่งดังต่อไปนี้

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm c(z-z_0)$$
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=\pm b(y-y_0)$$
$$\frac{(y-y_0)^2}{y^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=\pm a(x-x_0)$$

เมื่อ x_0, y_0, z_0, a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ



กราฟของทรงพาราโบลาเชิงวงรี

ตัวอย่าง 6.8.4 จงวาดกราฟของทรงพาราโบลาเชิงวงรี ที่มีสมการทั่วไปคือ

$x^2+y^2-4x-2y+4z=19$

....

....

....

....

....

....

....

....

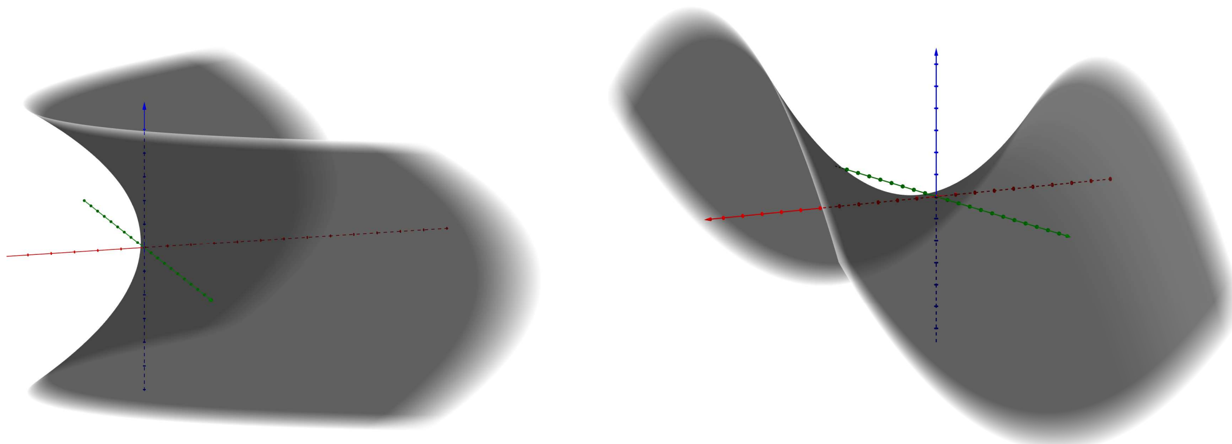
....

6.8.5 ทรงพาราโบลาเชิงไฮเพอร์โบลา (Hyperbolic Paraboloid)

ทรงพาราโบลาเชิงไฮเพอร์โบลา คือ ผิวกำลังสอง ที่มีสมการในรูปมาตรฐานแบบใดแบบหนึ่ง ดังต่อไปนี้

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm c(z-z_0)$$
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=\pm b(y-y_0)$$
$$\frac{(y-y_0)^2}{y^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=\pm a(x-x_0)$$

เมื่อ x_0, y_0, z_0, a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ



กราฟของทรงพาราโบลาเชิงไฮเพอร์โบลา

ตัวอย่าง 6.8.5 จงวาดกราฟของทรงพาราโบลาเชิงไฮเพอร์โบลา ที่มีสมการทั่วไปคือ

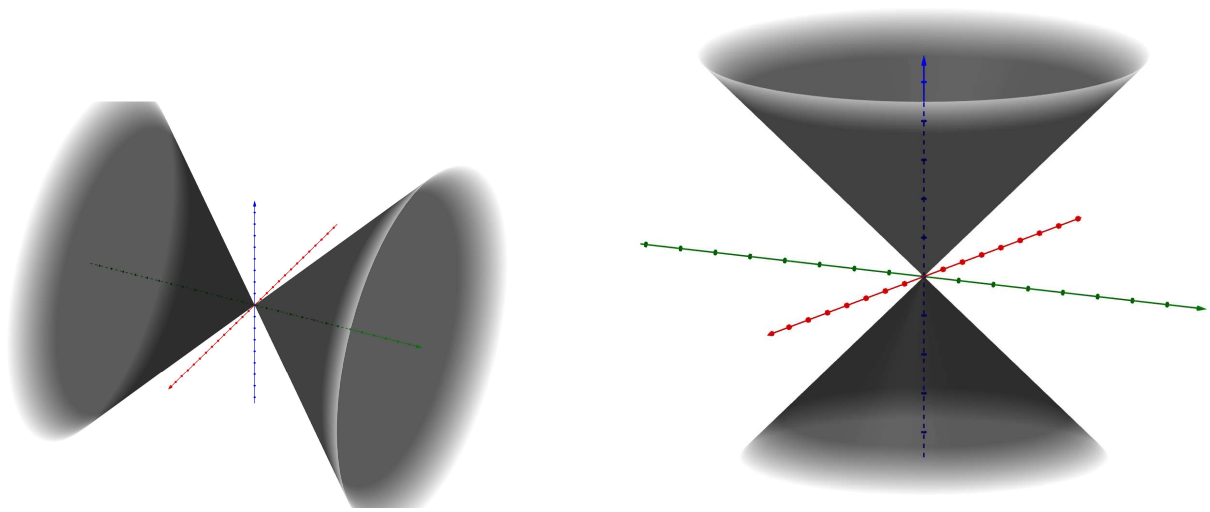
$2x^2-y^2-24x-2y+4z+59=0$

6.8.6 กรวยเชิงวงรี (Elliptic Cone)

กรวยเชิงวงรี คือ ผิวกำลังสองที่มีสมการในรูปมาตรฐานแบบใดแบบหนึ่งดังต่อไปนี้

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\frac{(z-z_0)^2}{c^2}$$
$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=\frac{(x-x_0)^2}{a^2}$$
$$\frac{(z-z_0)^2}{c^2}+\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=\frac{(y-y_0)^2}{b^2}$$

เมื่อ x_0, y_0, z_0, a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ



กราฟของกรวยเชิงวงรี

ตัวอย่าง 6.8.6 จงวาดกราฟของกรวยเชิงวงรีที่มีสมการทั่วไปคือ

$16x^2-4y^2+z^2+32x-8y+6z+21=0$

....

....

....

....

....

....

....

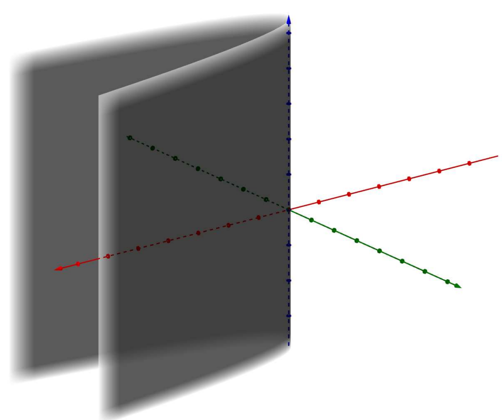
....

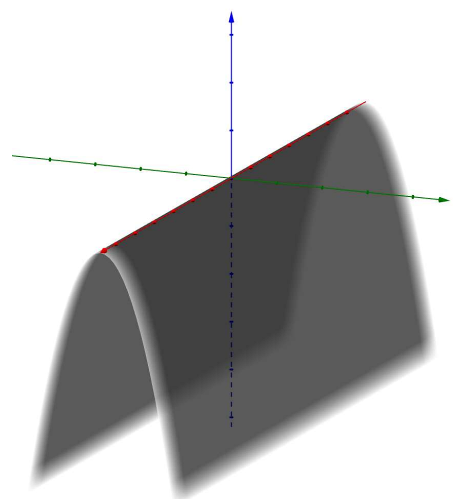
6.8.7 ทรงกระบอกเชิงพาราโบลา (Parabolic Cylinder)

ทรงกระบอกเชิงพาราโบลา คือ ผิวกำลังสองที่มีสมการในรูปมาตรฐานแบบใดแบบหนึ่งดังต่อไปนี้

$$(x - x_0)^2 = \pm 4c(y - y_0)$$
$$(x - x_0)^2 = \pm 4c(z - z_0)$$
$$(y - y_0)^2 = \pm 4c(x - x_0)$$
$$(y - y_0)^2 = \pm 4c(z - z_0)$$
$$(z - z_0)^2 = \pm 4c(x - x_0)$$
$$(z - z_0)^2 = \pm 4c(y - y_0)$$

เมื่อ x_0, y_0, z_0 และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ





กราฟของทรงกระบอกเชิงพาราโบลา

ตัวอย่าง 6.8.7 จงวาดกราฟของทรงกระบอกเชิงพาราโบลา ที่มีสมการทั่วไปคือ $x^2 - 4x - 2z + 10 = 0$

....

....

....

....

....

....

....

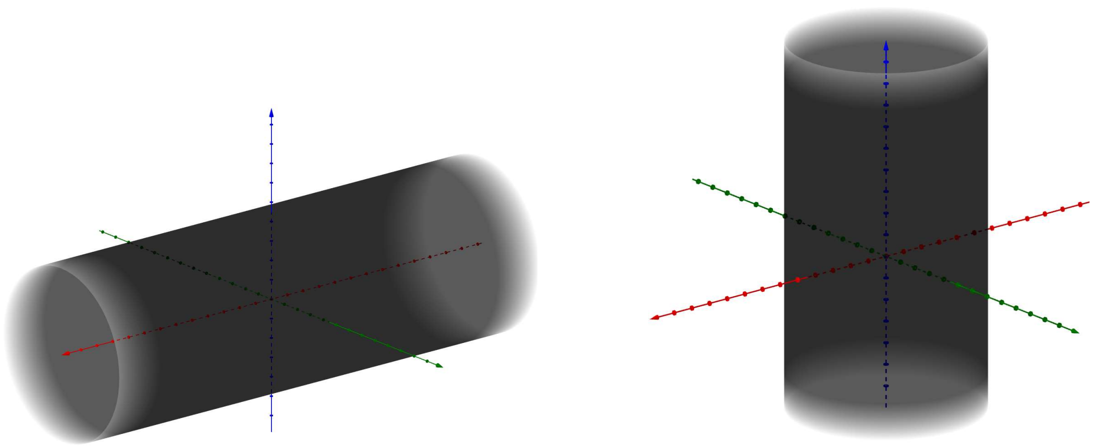
....

6.8.8 ทรงกระบอกเชิงวงรี (Elliptic Cylinder)

ทรงกระบอกวงรี คือ ผิวกำลังสองที่มีสมการในรูปมาตรฐานแบบใดแบบหนึ่งดังต่อไปนี้

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$
$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

เมื่อ x_0, y_0, z_0, a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ



กราฟของทรงกระบอกเชิงวงรี

ตัวอย่าง 6.8.8 จงวาดกราฟของทรงกระบอกวงรี ที่มีสมการทั่วไป คือ $x^2+4z^2+2x-16z+1=0$

....

....

....

....

....

....

....

....

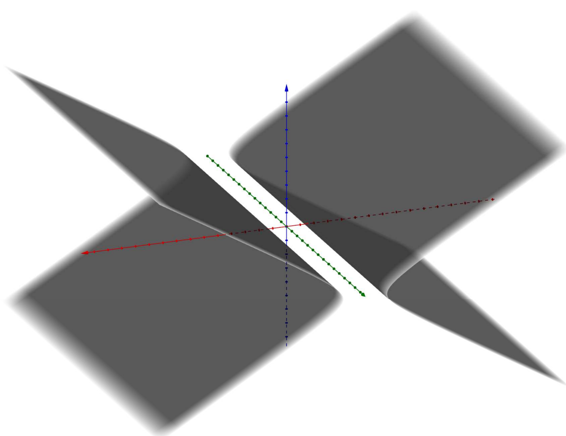
....

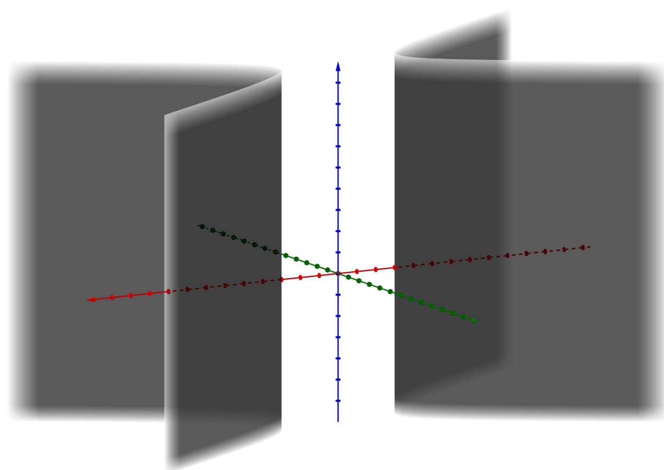
6.8.9 ทรงกระบอกเชิงไฮเพอร์โบลา (Hyperbolic Cylinder)

ทรงกระบอกเชิงไฮเพอร์โบลา คือ ผิวกำลังสองที่มีสมการในรูปมาตรฐานแบบใดแบบหนึ่งดังต่อไปนี้

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm 1$$
$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=\pm 1$$
$$\frac{(z-z_0)^2}{c^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=\pm 1$$

เมื่อ x_0, y_0, z_0, a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ





กราฟของทรงกระบอกเชิงไฮเพอร์โบลา

ตัวอย่าง 6.8.9 จงวาดกราฟของทรงกระบอกเชิงไฮเพอร์โบลา ที่มีสมการทั่วไปคือ

$4y^2-25z^2-24y+100z=65$

....

....

....

....

....

....

....

....

สรุปท้ายบทที่ 6

สำหรับบทที่ 6 นั้นเราได้ศึกษาเรื่องเรขาคณิตในปริภูมิ 3 มิติ ซึ่งในปริภูมิ 3 มิตินั้นประกอบไปด้วยระนาบ 3 แผ่น ตั้งฉากซึ่งกันและกัน เรียกว่า ระนาบพิกัด (Coordinate Planes) ได้แก่ ระนาบ XY ระนาบ XZ และระนาบ YZ ระนาบทั้งสามตัดกันในแนวตั้งฉาก รอยตัดเกิดเป็นเส้นตรง 3 เส้น ตั้งฉากซึ่งกันและกัน เรียกว่าแกนพิกัด (Coordinate Axes) คือ แกน X แกน Y และแกน Z แกนทั้งสามตัดกันที่จุด O เรียกว่าจุดกำเนิด (Origin) ระนาบพิกัดแบ่งปริภูมิ 3 มิติ ออกเป็น 8 อัฐภาค และสูตรหรือทฤษฎีที่เกี่ยวข้องในบทนี้ประกอบไปด้วย

1. ระยะทางระหว่างจุด $P_1(x_1,y_1,z_1)$ และจุด $P_2(x_2,y_2,z_2)$ คือ

$$\left|P_1P_2\right| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

2. ถ้า $P(x,y,z)$ แบ่งส่วนของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $P_1(x_1,y_1,z_1)$ และ $P_2(x_2,y_2,z_2)$ ออกเป็นอัตราส่วน $r=\dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned} x &= x_1 + r(x_2-x_1) \\ y &= y_1 + r(y_2-y_1) \\ z &= z_1 + r(z_2-z_1) \end{aligned}$$

3. ถ้า $P(x,y,z)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $P_1(x_1,y_1,z_1)$ และจุด $P_2(x_2,y_2,z_2)$ แล้วจะได้ว่า

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

4. เวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$ เมื่อมีจุดเริ่มต้นที่จุด $P(x_1,y_1,z_1)$ และจุดปลายที่ $Q(x_2,y_2,z_2)$ มี ตัวแทนมาตรฐานเป็น $\overrightarrow{PQ}=(x_2-x_1)\hat{i}+(y_2-y_1)\hat{k}+(z_2-z_1)\hat{j}$ และขนาดของ $\overrightarrow{PQ}$ เขียนแทนด้วย $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ โดยที่ $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

5. ให้ $\vec{u}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ และ $\hat{v}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ ผลคูณเชิงสเกลาร์เขียนแทนด้วย $\vec{u}\cdot\vec{v}$ นิยามโดย $\vec{u}\cdot\vec{v}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ หรือ $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\cos\theta$

- ภาพฉายเชิงเวกเตอร์ของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$ คือ $\vec{u}_{\vec{v}}=\left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|^2}\right)\vec{v}$
- ภาพฉายเชิงสเกลาร์ของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$ คือ $\left|\vec{u}_{\vec{v}}\right|=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}$
- ให้ $\vec{u}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ และ $\hat{v}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในปริภูมิ 3 มิติ ผลคูณเชิงเวกเตอร์เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{u}\times\vec{v}$ นิยามโดย

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

- สมการเส้นตรงในปริภูมิ 3 มิติ เขียนได้ 3 แบบ ดังนี้
  1. $\left\langle x,y,z\right\rangle=\left\langle x_0+at,y_0+bt,z_0+ct\right\rangle$ เรียกว่า สมการในรูปเวกเตอร์
  2. $x=x_0+at,\ y=y_0+bt,\ z=z_0+ct$ เรียกว่า สมการอิงตัวแปรเสริม
  3. $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ เรียกว่า สมการสมมาตร
- ระยะทางจากจุด Q มายังเส้นตรง L คือ $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{PQ}\times\vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}$
- ถ้าระนาบ S ผ่านจุด $P_0(x_0,y_0,z_0)$ จุด $P(x,y,z)$ เป็นจุดใด ๆ บนระนาบ S และระนาบ S ตั้งฉากกับ $\vec{n}=\left\langle a,b,c\right\rangle$ แล้วสมการรูปทั่วไปของสมการระนาบ คือ

$$ax+by+cz+d=0$$

- ให้ $\vec{N}_1$ และ $\vec{N}_2$ เป็น Normal Vector ของระนาบ S_1 และระนาบ S_2 ตามลำดับ มุมระหว่างระนาบ S_1 และระนาบ S_2 หมายถึงมุมระหว่าง $\vec{N}_1$ และ $\vec{N}_2$ โดยที่ $\cos\theta=\dfrac{\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|\left|\vec{N}_2\right|}$
- ระนาบสองระนาบถ้าไม่ขนานกันจะต้องตัดกันเสมอ และรอยตัดของทั้งสองระนาบเป็น เส้นตรงใน 3 มิติ ถ้าให้ $\vec{N}_1$ และ $\vec{N}_2$ เป็น Normal Vector จะได้ว่า $\vec{N}_1\times\vec{N}_2$ จะเป็นเวกเตอร์ที่ขนานกับสมการที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ
- ระยะทางระหว่างจุด $P_0(x_0,y_0,z_0)$ ไปยังระนาบ $ax+by+cz+d=0$ คือ

$$D=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

- ระยะห่างระหว่างระนาบ $ax+by+cz+d_1=0$ กับ $ax+by+cz+d_2=0$ คือ

$$D=\frac{\left|d_1-d_2\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ในการพิจารณาผิวกำลังสองนั้นเราได้พิจารณาจุดตัดของพื้นผิวกับแกนพิกัด การสมมาตรของพื้นผิว รอยตัดของพื้นผิวกับระนาบ และขอบเขตของพื้นผิว

พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง คือ พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้งบนระนาบรอบเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่ง ที่อยู่บนระนาบนั้น ในหัวข้อนี้ เราได้ศึกษาพื้นผิวที่เกิดจากการหมุนเส้นโค้งในระนาบที่กำหนดให้รอบเส้นตรงที่อยู่บนระนาบเดียวกับเส้นโค้ง เรียกเส้นตรงที่กำหนดให้ว่า แกนหมุน และเรียกผิวที่ได้จากการหมุนนี้ว่า พื้นผิวที่เกิดจากการหมุน

ให้ C เป็นเส้นโค้งเส้นหนึ่ง และ L เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง (ซึ่งไม่ได้อยู่บนระนาบเดียวกับเส้นโค้ง) เซตของจุดที่อยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง L และตัดเส้นโค้ง C เรียกว่า **ทรงกระบอก (Cylinder)** เรียกเส้นโค้ง C ว่าเส้นบังคับ (Directrix) เรียกเส้นตรงแต่ละเส้นที่ขนานกับเส้นตรง L และผ่านเส้นโค้ง C ว่า ตัวก่อกำเนิด (Generatrix) และตัวก่อกำเนิดแต่ละเส้น เป็นสมาชิกของทรงกระบอก เรียกเส้นตรง L ว่า แกนของทรงกระบอก

ให้ C เป็นเส้นโค้งเส้นหนึ่ง P_0 เป็นจุดคงที่จุดหนึ่ง เซตของจุดที่อยู่บนเส้นตรงทุกเส้นที่ลากผ่านจุด P_0 และตัดกับเส้นโค้ง C เรียกว่า **กรวย (Cone)** เรียกเส้นโค้ง C ว่า เส้นบังคับ (Directrix) เรียกจุด P_0 ว่า จุดยอด (Vertex) เรียกเส้นตรงแต่ละเส้นที่ผ่านจุด P_0 และตัดเส้นโค้ง C ว่า ตัวก่อกำเนิด (Generatrix) และกล่าวว่า ตัวก่อกำเนิดเป็นสมาชิกของกรวย

กราฟของพื้นผิวกำลังสองที่สำคัญมีดังนี้

- ทรงรี มีสมการในรูปมาตรฐาน คือ

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

- ทรงไฮเพอร์โบลาเชิงวงรีแบบเชื่อมโยง มีสมการในรูปมาตรฐาน คือ

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

- ทรงไฮเพอร์โบลาเชิงวงรีแบบไม่เชื่อมโยง มีสมการในรูปมาตรฐาน คือ

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1$$

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1$$

- ทรงพาราโบลาเชิงวงรี มีสมการในรูปมาตรฐาน คือ

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm c(z-z_0)$$
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=\pm b(y-y_0)$$
$$\frac{(y-y_0)^2}{y^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=\pm a(x-x_0)$$

- กรวยเชิงวงรี มีสมการในรูปมาตรฐาน คือ

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\frac{(z-z_0)^2}{c^2}$$
$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=\frac{(x-x_0)^2}{a^2}$$
$$\frac{(z-z_0)^2}{c^2}+\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=\frac{(y-y_0)^2}{b^2}$$

- ทรงกระบอกเชิงพาราโบลา มีสมการในรูปมาตรฐาน คือ

$$(x-x_0)^2=\pm 4c(y-y_0)$$
$$(x-x_0)^2=\pm 4c(z-z_0)$$
$$(y-y_0)^2=\pm 4c(x-x_0)$$
$$(y-y_0)^2=\pm 4c(z-z_0)$$
$$(z-z_0)^2=\pm 4c(x-x_0)$$
$$(z-z_0)^2=\pm 4c(y-y_0)$$

- ทรงกระบอกวงรี มีสมการในรูปมาตรฐาน คือ

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$
$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

- ทรงกระบอกเชิงไฮเพอร์โบลา มีสมการในรูปมาตรฐาน คือ

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm 1$$
$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=\pm 1$$
$$\frac{(z-z_0)^2}{c^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=\pm 1$$

แบบฝึกหัดบทที่ 6

จงหาสมการสมมาตรและสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรงตามเงื่อนไขต่อไปนี้ (ข้อ 7.1 - 7.6)

7.1 ผ่านจุด $P(4,-3,2)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\vec{v} = \langle 1,-3,2 \rangle$

7.2 ผ่านจุด $P(1,1,-2)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\vec{v} = 5\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$

7.3 ผ่านจุด $P(0,0,0)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\vec{v} = 2\hat{i} - 3\hat{k}$

7.4 ผ่านจุด $P_1(2,4,-1)$ และจุด $P_2(3,2,-4)$

7.5 ผ่านจุด $P_1(-3,2,1)$ และจุด $P_2(9,0,-1)$

7.6 ผ่านจุด $P_1(2,2,2)$ และจุด $P_2(-1,-2,-3)$

ระยะทางจากจุดไปยังเส้นตรงที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ข้อ 7.7 - 7.12)

7.7 จุด $(2,1,3)$ และเส้นตรง $x = 2 + 2t, y = -4t, z = 1 - t$

7.8 จุด $(-1,4,3)$ และเส้นตรง $x = 10 + 4t, y = -3, z = 4t$

7.9 จุด $(3,-1,4)$ และเส้นตรง $4 - x = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+5}{3}$

7.10 จุด $(0,0,12)$ และเส้นตรง $\dfrac{x}{4} = -\dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{2}$

7.11 จุด $(2,1,-1)$ และเส้นตรง $x = 2t, y = 1 + 2t, z = 2t$

7.12 จุด $(0,0,0)$ และเส้นตรง $\langle x-1, y-2, z-3 \rangle = t\langle 0,1,-2 \rangle$

จงหาสมการระนาบที่กำหนดตามเงื่อนไขต่อไปนี้ (ข้อ 7.13 - 7.20)

7.13 ผ่านจุด $P(0,2,-1)$ และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{v} = \langle 3,-2,-1 \rangle$

7.14 ผ่านจุด $P(1,-1,3)$ และขนานกับระนาบ $2x + 3y - z = 5$

7.15 ผ่านจุด $P(2,4,5)$ และตั้งฉากเส้นตรง $x = 5 + t, y = 1, z = 4t$

7.16 ผ่านจุด $P(1,-1,2)$ และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ โดยที่ $B(2,1,3)$

7.17 ผ่านจุด $P(0,2,-1)$ และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{v} = \langle 3,-2,-1 \rangle$

7.18 ผ่านจุด $(0,1,2),(2,0,3)$ และจุด $(4,3,0)$

7.19 ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{v} = 4\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ และผ่านจุดกำเนิด

7.20 ตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $P(4,0,6)$ และจุด $Q(0,-8,2)$ และผ่านจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง PQ

จงหามุมระหว่างระนาบสองระนาบต่อไปนี้ (ข้อ 7.21 - 7.26)

7.21 ระนาบ $x+y-1=0$ และระนาบ $2x+y-2z-2=0$

7.22 ระนาบ $5x+y-z=10$ และระนาบ $x-2y+3z=-1$

7.23 ระนาบ $2x+2y+2z=3$ และระนาบ $2x+2y-z=5$

7.24 ระนาบ $x+y+z=1$ และระนาบ XY

7.25 ระนาบ $4x+3y=12$ และระนาบ $3x+2y+6z=6$

7.26 ระนาบ $2x+2y-z=3$ และระนาบ $x+2y+z=2$

จงหาสมการเส้นตรงซึ่งเป็นรอยตัดของระนาบสองระนาบต่อไปนี้ (ข้อ 7.26 - 7.30)

7.27 ระนาบ $x+y+z=9$ และระนาบ $2x+y-z=-3$

7.28 ระนาบ $x+y-z=-8$ และระนาบ $2x-y+2z=6$

7.29 ระนาบ $x-y-2z=-1$ และระนาบ $x-3y-3z=-7$

7.30 ระนาบ $x-y-2z+8=0$ และระนาบ $2x-y-2z+4=0$

จงหาระยะทางระหว่างจุดไปยังระนาบที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ข้อ 7.31 - 7.34)

7.31 จุด $(2,-3,4)$ ไปยังระนาบ $2x+y+2z=13$

7.32 จุด $(0,-1,0)$ ไปยังระนาบ $4y+3z+12=0$

7.33 จุด $(a,-a,2a)$ ไปยังระนาบ $2ax-y+az=4a$, $a\neq 0$

7.34 จุด $(-1,2,1)$ ไปยังระนาบที่ผ่านจุด $(0,0,0),(1,2,4)$ และจุด $(-2,-1,1)$

7.35 จุด $(-1,2,1)$ ไปยังระนาบที่ผ่านจุด $(-3,5,1)$ และตั้งฉากกับ $\vec{v}=\left\langle 3,1,5\right\rangle$

จงหาระยะทางระหว่างระนาบสองระนาบที่ขนานกันในแต่ละข้อต่อไปนี้ (ข้อ 7.36 - 7.42)

7.36 ระนาบ $x-4y-2z=4$ และระนาบ $x-4y-2z=10$

7.37 ระนาบ $x+2y=6$ และระนาบ $x+2y=1$

7.38 ระนาบ $2x-y+2z=9$ และระนาบ $2x-y+2z=-12$

7.39 ระนาบ $x-y-z=4$ และระนาบ $2x-2y-2z=-3$

7.40 ระนาบ $2x-y+2z=4$ และระนาบ $2x-y+2z=-2$

7.41 ระนาบ $x-y-2z+8=0$ และระนาบ $5x-5y-10z=57$

7.42 ระนาบ $2x-y-2z+4=0$ และระนาบ $-8x+4y+8z+63=0$

จงหาจุดตัดแกน การสมมาตร รอยตัดของระนาบ และขอบเขต ของสมการต่อไปนี้ (ข้อ 8.1 - 8.18)

8.1 $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

8.2 $3x + 2y + 2z = 12$

8.3 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

8.4 $x = \sqrt{y^2 + x^2}$

8.5 $x^2 + y^2 = z$

8.6 $z = 4 - x^2 - y^2$

8.7 $z = 3 - x - y$

8.8 $z = e^x$

8.9 $z = \sin y$

8.10 $y^2 - z^2 = 4$

8.11 $z = x^3$

8.12 $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 = 144$

8.13 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 0$

8.14 $x^2 + y^2 - 4y = 0$

8.15 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = -1$

8.16 $(x+1)^2 + 9(y-5)^2 + 16z^2 = 144$

8.17 $z - 1 = (x-2)^2$

8.18 $\dfrac{(x-1)^2}{25} + \dfrac{(y-2)^2}{16} + \dfrac{(z-3)^2}{36} = 1$

จงหาสมการของพื้นผิวที่กำหนดเงื่อนไขให้ต่อไปนี้ (ข้อ 8.19 - 8.29)

8.19 พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $y^2 - x^2 = 1,\ z = 0$ รอบแกน Y

8.20 พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $z = e^{-x^2},\ y = 0$ รอบแกน Z

8.21 พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $5z = x^2 + 3,\ y = 0$ รอบแกน X

8.22 พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $z = \sin y,\ x = 0$ รอบแกน Z

8.23 พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $1 - x = y,\ z = 0$ รอบแกน X

8.24 พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $x = \sqrt{y},\ z = 0$ รอบแกน X

8.25 พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $x = \sqrt{y},\ z = 0$ รอบแกน Y

8.26 พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $z = \cos x,\ y = 0$ รอบแกน X

8.27 พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $z = \cos x,\ y = 0$ รอบแกน Z

8.28 พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $x + z = 2,\ y = 0$ รอบแกน X

จงหาสมการของทรงกระบอกที่มีเส้นบังคับ (D) และตัวก่อกำเนิด (G) ดังต่อไปนี้ พร้อมทั้งวาดกราฟของทรงกระบอก (ข้อ 8.30 - 8.39)

8.30 D : $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$
G : แกน Z

8.31 D : $3x^2 + z^2 + 4z = 0$, $y = 0$
G : ขนานกับเวกเตอร์ $\langle 4,1,0 \rangle$

8.32 $D \ : \ y^2 = 4x \ , \ z = 0$
$G \ : \ $ ขนานกับเวกเตอร์ $\langle 1,2,3 \rangle$

8.33 $D \ : \ 2x^2 + y^2 + 2y = 0 \ , \ z = 0$
$G \ : \ $ ขนานกับเวกเตอร์ $\langle 2,0,1 \rangle$

8.34 $D \ : \ x^2 = 4y \ , \ z = 0$
$G \ : \ $ ขนานกับเวกเตอร์ $\langle 1,2,3 \rangle$

8.35 $D \ : \ x^2 + y^2 = 25 \ , \ z = 0$
$G \ : \ $ ขนานกับเวกเตอร์ $\langle 0,1,1 \rangle$

8.36 $D \ : \ \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{z^2}{9} = 1 \ , \ y = 0$
$G \ : \ $ ขนานกับเวกเตอร์ $\langle 1,2,0 \rangle$

8.37 $D \ : \ \left(y-4\right)^2 = 12\left(x-1\right), \ z = 0$
$G \ : \ $ ขนานกับเวกเตอร์ $\langle 2,0,1 \rangle$

8.38 $D \ : \ \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{16} = 1 \ , \ x = 0$
$G \ : \ $ ขนานกับเวกเตอร์ $\langle 4,1,0 \rangle$

8.39 $D \ : \ 3x + 4y = 24 \ , \ z = 0$
$G \ : \ $ ขนานกับเวกเตอร์ $\langle 2,3,4 \rangle$

จงหาสมการของกรวยที่มีเส้นบังคับ (D) และจุดยอด (V) ดังต่อไปนี้ พร้อมทั้งวาดกราฟของกรวย (ข้อ 8.30 - 8.39)

8.40 $D \ : \ z^2 = 4y \ , \ x = 0$ และจุด $V = (2,0,0)$

8.41 $D \ : \ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1 \ , \ y = 0$ และจุด $V = (2,5,1)$

8.42 $D \ : \ x^2 + y^2 = 1 \ , \ z = 0$ และจุด $V = (1,1,3)$

8.43 $D \ : \ \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \ , \ z = 0$ และจุด $V = (0,0,2)$

8.44 $D \ : \ 4x^2 + 16z^2 = 1 \ , \ y = 8$ และจุด $V = (0,0,0)$

8.45 $D \ : \ x^2 + 4y^2 = 1 \ , \ z = 4$ และจุด $V = (0,0,0)$

8.46 $D \ : \ x^2 + 4y^2 = 16 \ , \ z = 4$ และจุด $V = (2,1,0)$

8.47 $D \ : \ \left(y-2\right)^2 = 24\left(x-4\right), \ z = 2$ และจุด $V = (1,0,0)$

8.48 $D \ : \ x = z^2 , \ y = 3$ และจุด $V = (1,0,2)$

8.49 $D \ : \ (z-1)^2 = 4y \ , \ x = 3$ และจุด $V = (0,1,2)$

บอกชื่อของกราฟต่อไปนี้ พร้อมทั้งวาดกราฟ (ข้อ 8.50 - 8.57)

8.50 $z = (x+2)^2 + (y-3)^2 - 9$

8.51 $\dfrac{(x+2)^2}{4} - \dfrac{(y-1)^2}{2} + \dfrac{(z-2)^2}{8} = 1$

8.52 $z = 4 - x^2 - y^2 - 2y$

8.53 $4x^2 + y^2 - 24x - 4y + 20 = 0$

8.54 $x^2 = y^2 + z^2$

8.55 $2x^2 - 3y^2 - 8x - 12y + 12z = 52$

8.56 $z^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$

8.57 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{9} = 1$

8.58 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$

8.59 $z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$

8.60 $y^2 + z^2 - x^2 = 1$

8.61 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = -1$

8.62 $y - z^2 = 0$

8.63 $36x^2 - 9y^2 + 16z^2 = 144$

8.64 $2x^2 + y^2 - z = 0$

8.65 $x^2 + y^2 - z + 1 = 0$

8.66 $4x^2 - 6y^2 - 16x - 24y + 24z = 104$

8.67 $9x^2 + y^2 + 4z^2 - 18x + 2y + 16z = 10$

8.68 กำหนดสมการของพื้นผิวเป็น $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{2} = 1$

1. บอกชื่อของกราฟต่อไปนี้และเขียนกราฟของพื้นผิว
2. จงหาสมการรอยตัดบนระนาบ $z = 0$ และ $z = -\sqrt{6}$ พร้อมทั้งเขียนกราฟของรอยตัดบนกราฟของพื้นผิว

8.69 กำหนดสมการของพื้นผิวเป็น $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1$

1. บอกชื่อของกราฟต่อไปนี้และเขียนกราฟของพื้นผิว
2. จงหาสมการรอยตัดบนระนาบ $z = 0$ และ $z = 3\sqrt{2}$ พร้อมทั้งเขียนกราฟของรอยตัดบนกราฟของพื้นผิว

8.70 กำหนดสมการของพื้นผิวเป็น $x^2 + \frac{y^2}{4} = \frac{z}{2}$

1. บอกชื่อของกราฟต่อไปนี้และเขียนกราฟของพื้นผิว
2. จงหาสมการรอยตัดบนระนาบ $x = 1, y = 0$ และ $z = 8$ พร้อมทั้งเขียนกราฟของรอยตัดบนกราฟของพื้นผิว

8.71 กำหนดสมการของพื้นผิวเป็น $16x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$

1. บอกชื่อของกราฟต่อไปนี้และเขียนกราฟของพื้นผิว
2. จงหาสมการรอยตัดบนระนาบ $z = 8$ และ $y = 3$ พร้อมทั้งเขียนกราฟของรอยตัดบนกราฟของพื้นผิว

8.72 กำหนดสมการของพื้นผิวเป็น $2x^2 - 3y^2 - 8x - 12y + 12z = 52$

1. บอกชื่อของกราฟต่อไปนี้และเขียนกราฟของพื้นผิว
2. จงหาสมการรอยตัดบนระนาบ $x = 2, y = 3$ และ $z = 4$ พร้อมทั้งเขียนกราฟของรอยตัดบนกราฟของพื้นผิว