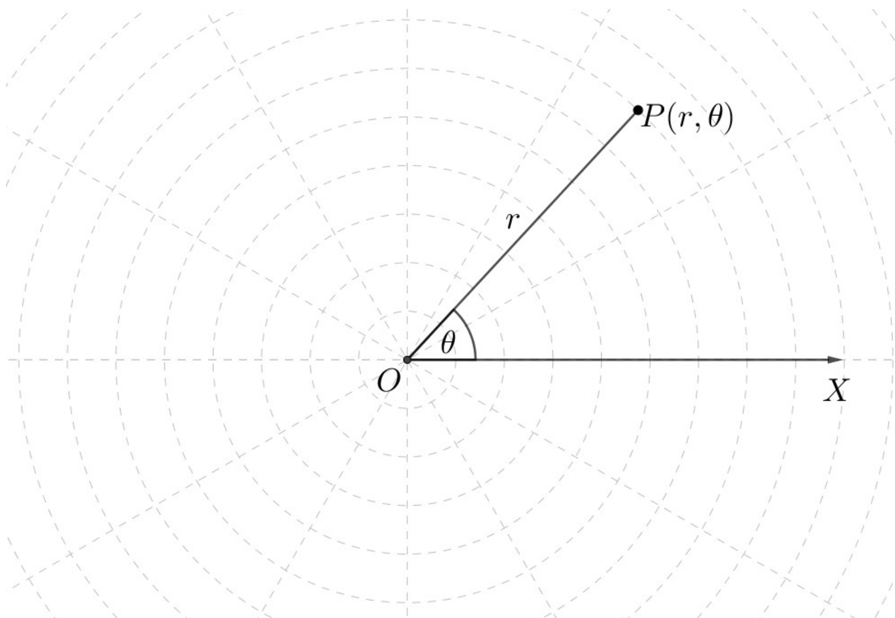
บทที่ 5
ระบบพิกัดเชิงขั้วและสมการอิงตัวแปรเสริม
(Polar Coordinate System and Parametric Equation)

มีการนำแนวคิดเรื่องมุมและรัศมีมาใช้ตั้งแต่สมัยโบราณ ในหนึ่งสหัสวรรษก่อนคริสต์ศักราช นักดาราศาสตร์ชาวกรีกที่ชื่อฮิปปาร์คัส (Hipparchus 190-120 ปีก่อนคริสตกาล) สร้างตารางฟังก์ชันคอร์ดที่ให้ความยาวของคอร์ดสำหรับแต่ละมุม และมีการอ้างอิงว่าเขาใช้ระบบพิกัดเชิงขั้วในการพิสูจน์ตำแหน่งของดวงดาว On Spirals (ว่าด้วยเส้นเกลียว) อาร์คิมิดีส (Archimedes; 287-212 ปีก่อนคริสตกาล) บรรยายถึงวงก้นหอยอาร์คิมิดีสว่ารัศมีของฟังก์ชันขึ้นกับมุม อย่างไรก็ตามสิ่งที่ชาวกรีกเหล่านี้ทำก็ยังไม่ขยายออกไปถึงระบบพิกัดเชิงขั้วที่สมบูรณ์ ในคริสต์ศตวรรษที่ 9 นักคณิตศาสตร์ชาวเปอร์เซียที่ชื่อ ฮะบัช อัล-ฮะซับ อัล-มาร์วะซิ (Habash al-Hasib al-Marwazi) ใช้วิธีตรีโกณมิติเชิงทรงกลมและการฉายแผนที่เพื่อที่จะแปลงผันพิกัดเชิงขั้วไปเป็นระบบพิกัดที่แตกต่างโดยมุ่งความสนใจไปยังจุดจำเพาะบนรูปทรงกลม

Origin of Polar Coordinates (กำเนิดพิกัดเชิงขั้ว) ประวัติของพิกัดนี้ถูกบรรยายโดยจูเลียน โลเวล โคล์ลิดจ์ (Julian Lowell Coolidge 1873 –1954) เกรกัวร์ เดอ แซง-แวงซอง (Grégoire de Saint-Vincent 1584 - 1667) และ โบนาเวนตูรา คาวาลิเอริ (Bonaventura Cavalieri 1598 - 1647) ต่างเริ่มนำแนวคิดมาใช้ในกลางคริสต์ศตวรรษที่ 7 แซง-แวงซองเขียนถึงพิกัดเชิงขั้วโดยการส่วนตัวในปี ค.ศ. 1625 และตีพิมพ์งานของเขาในปี ค.ศ. 1647 ขณะที่คาวาลิเอริตีพิมพ์ในปี ค.ศ. 1635 และฉบับที่ถูกต้องในปี ค.ศ. 1653 คาวาลิเอริเป็นบุคคลแรกที่ใช้พิกัดเชิงขั้วแก้ปัญหาเกี่ยวกับพื้นที่ในวงก้นหอยอาร์ คิมิดีส ต่อมาแบลส ปาสกาล (Blaise Pascal 1623 - 1662) ได้ใช้พิกัดเชิงขั้วคำนวณหาความยาวของส่วนโค้งของรูปพาราโบลา เซอร์ไอแซก นิวตัน พิเคราะห์การแปลงระหว่างพิกัดเชิงขั้วซึ่งเขาได้อิงตาม "รูปแบบที่ 7 สำหรับวงก้นหอย" และพิกัดอื่น ๆ อีก 9 พิกัดในวารสาร Acta Eruditorum (1691) เจคอบ เบอร์โนลลี (Jacob Bernoulli 1654 - 1705) ใช้ระบบร่วมกับจุดบนเส้นที่เรียกว่าขั้วและแกนเชิงขั้ว ตามลำดับ พิกัดเป็นระยะทางจากขั้วและมุมจากแกนเชิงขั้ว งานของเบอร์โนลลีครอบคลุมไปถึงการพบรัศมีความโค้งของเส้นโค้งที่อยู่ในพิกัดนี้ คำว่า พิกัดเชิงขั้ว โดยแท้จริงแล้วน่าจะมาจากเกโกรีโอ ฟอนตานา (Gregorio Fontana) นักคณิตศาสตร์ชาวอิตาลีในสมัยคริสต์ศตวรรษที่ 18 และคำนี้ปรากฏเป็นภาษาอังกฤษในงานแปลของ จอร์จ พีคอก (George Peacock) ที่ชื่อ แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์และปริพันธ์ ของลากรัซ (Lacroix) ในปี ค.ศ. 1816 อเล็กซิส คลาเราต์เป็นคนแรกที่คิดพิกัดเชิงขั้วในรูปแบบสามมิติ และเลออนฮาร์ด ออยเลอร์เป็นคนแรกที่นำมาใช้งานจริง

5.1 ระบบพิกัดเชิงขั้ว (Polar Coordinate System)

ในระบบพิกัดเชิงขั้วนี้ประกอบไปด้วย แกนเชิงขั้ว (Polar Axis) ซึ่งเป็นรังสี $\overrightarrow{OX}$ บนระนาบ เรียกจุด O ว่าจุดกำเนิด (Origin) หรือ ขั้ว (Pole) และส่วนของเส้นตรง OP เขียนแทนด้วย r เรียกว่า เวกเตอร์รัศมี (Radius Vector) θ เรียกว่า มุมเชิงขั้ว (Polar Angle) ดังรูปที่ 5.1

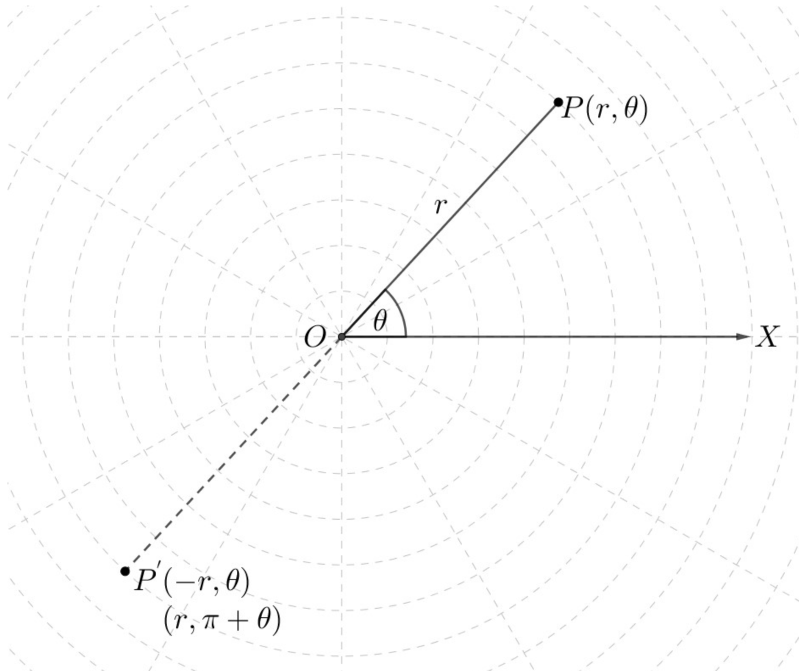


รูปที่ 5.1 แสดงพิกัดเชิงขั้ว

พิกัดของจุด P เขียนแทนด้วย $P(r,\,\theta)$ หรือ $(r,\,\theta)$

- ระยะ r มีค่าเป็นบวก ถ้าวัดจากจุดขั้วไปในทิศเดียวกับรังสีของมุม
- ระยะ r มีค่าเป็นลบ ถ้าวัดจากจุดขั้วไปในทิศตรงข้ามกับรังสีของมุม
- มุม θ มีค่าเป็นบวก ถ้าวัดทวนเข็มนาฬิกาจากแกนเชิงขั้ว
- มุม θ มีค่าเป็นลบ ถ้าวัดตามเข็มนาฬิกาจากแกนเชิงขั้ว

การบอกพิกัดของจุด P' ซึ่งอยู่ตรงกันข้ามกับจุด P เมื่อเทียบกับจุดขั้วเราใช้พิกัด $(r,\,\pi+\theta)$ หรือใช้ระยะทางเป็น $-r$ ก็ได้ แต่ต้องใช้มุมที่วัดจากแกนเชิงขั้วกับเส้นตรงที่ต่อจาก OP' ไปยังจุด P เป็นมุม θ เขียนแทนด้วยพิกัด $(-r,\,\theta)$ ดังรูปที่ 5.2



รูปที่ 5.2 แสดงพิกัดของจุด $P'(-r,\theta)$

นอกจากนี้มุมที่ใช้แทนจุด P หรือ P' ยังใช้มุมได้เกิน 1 รอบ เช่น

- ใช้พิกัดเป็น $(r,\ \theta \pm 2n\pi)$ เมื่อ $n = 1,2,3,\ldots$ แทนจุด P
- ใช้พิกัดเป็น $(-r,\ \theta \pm 2n\pi)$ เมื่อ $n = 1,2,3,\ldots$ แทนจุด P'

ซึ่งจะเห็นว่า พิกัดเชิงขั้วของจุด P มีหลายแบบคือ

$$\begin{aligned}(r,\ \theta) &= (-r,\ \theta + \pi)\\ &= (-r,\ \theta - \pi)\\ &= (r,\ \theta + 2n\pi)\end{aligned}$$

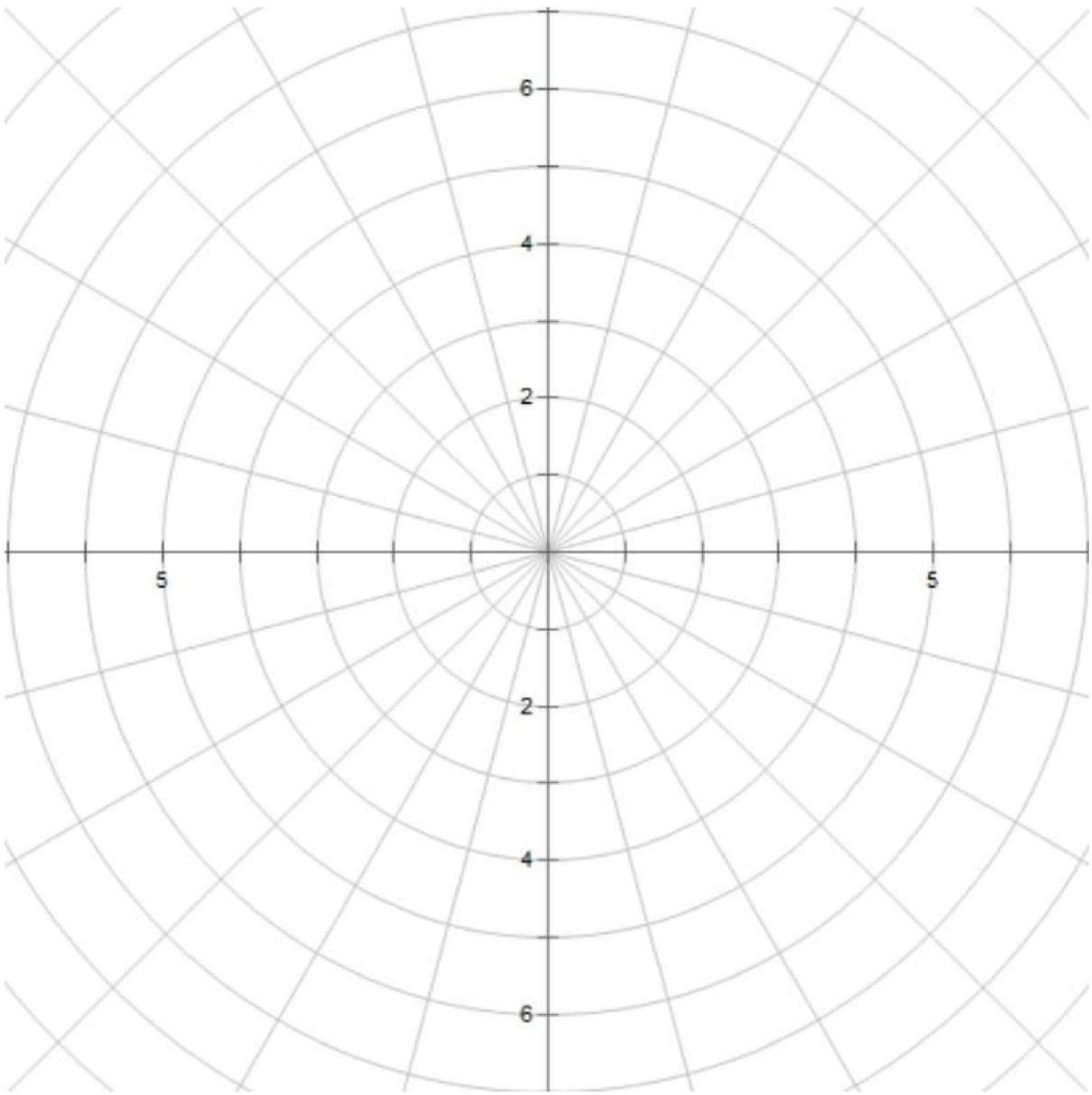
เมื่อ n คือจำนวนเต็ม

เราสามารถเขียนรวมในรูปทั่วไปได้เป็น

$$((-1)^n r,\ \theta + n\pi)$$

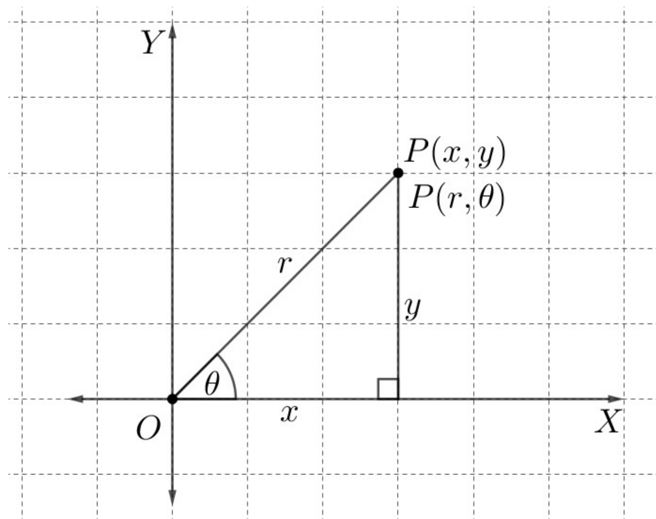
เมื่อ $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

ตัวอย่าง 5.1.1 จงลงจุดในระบบพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้ $A\left(5, \dfrac{\pi}{3}\right),\ B\left(3, -\dfrac{\pi}{6}\right),\ C\left(-5, \dfrac{\pi}{4}\right),\ D(-2, -\pi)$ $E(6, 60^\circ),\ F(-3, 260^\circ)$ และ $G(-4, -30^\circ)$



5.2 ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉากและพิกัดเชิงขั้ว (Relations Between Rectangular and Polar Coordinates)

ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉากกับพิกัดเชิงขั้วพิจารณาได้จากรูปที่ 5.6 ซึ่งขั้วของระบบพิกัดเชิงขั้วทับกับจุดกำเนิดของระบบพิกัดฉาก และแกนเชิงขั้วของระบบพิกัดเชิงขั้วทับกับแกน X ด้านบวกของระบบพิกัดฉาก โดยกำหนดจุด P ให้มีพิกัดเป็น $(x,\, y)$ ในระบบพิกัดฉาก และมีพิกัด $(r,\, \theta)$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว



รูปที่ 5.6 ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉากกับพิกัดเชิงขั้ว

จากรูปที่ 5.6 จะได้ความสัมพันธ์ของ x และ y ในเทอมของ r และ θ ดังนี้

$$x = r\cos\theta \text{ และ } y = r\sin\theta \quad \text{...}(1)$$

ถึงแม้ว่าเราจะได้สมการ (1) จากการพิจารณารูปที่ 5.6 ซึ่งแสดงเฉพาะกรณีเมื่อ $r > 0$ และ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ แต่สมการ (1) เป็นจริงสำหรับทุกค่าของ r และ θ ดังนั้นสมการดังกล่าวทำให้เราสามารถหาพิกัดฉากได้เมื่อทราบพิกัดเชิงขั้ว ในทางกลับกัน เมื่อทราบพิกัดฉาก เราสามารถหาพิกัดเชิงขั้วได้จากความสัมพันธ์ของ r และ θ ในเทอมของ x และ y ดังนี้

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ และ } \tan\theta = \frac{y}{x} \quad \text{..}(2)$$

สังเกตว่า θ ที่สอดคล้องกับสมการ (2) มีได้หลายค่า ในการหาพิกัดเชิงขั้วจากพิกัดฉาก เราจึงจะไม่เพียงแค่เลือกค่า θ ใดๆ ที่สอดคลองกับ $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ แต่จะต้องเลือก θ ที่ทำให้จุด $(r,\, \theta)$ อยู่ในจตุภาคที่ตรงกับที่ต้องการด้วย

ค่ามุม θ คือ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ดังนั้นค่าของ θ ในสมการ $\tan\theta = \frac{y}{x}$ และ r ในสมการ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ จะไม่แสดงจุดใด ๆ ที่อยู่ทางซ้ายของแกน X ในการหา θ จึงแยกเป็นสองส่วนโดยพิจารณาค่าของ x ดังนี้

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}\frac{y}{x} & , x > 0 \\ \pi + \tan^{-1}\frac{y}{x} & , x < 0 \end{cases}$$

ในการคำนวณ θ เมื่อเปลี่ยนจากพิกัดฉากไปยังพิกัดเชิงขั้ว

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}\frac{y}{x} & , (x,y) \in Q_1, Q_4 \\ \pi + \tan^{-1}\frac{y}{x} & , (x,y) \in Q_3 \\ -\pi + \tan^{-1}\frac{y}{x} & , (x,y) \in Q_2 \end{cases}$$

เราอาจให้ทั้ง r และ θ มีค่าเป็นบวกโดยใช้สมการ (2) และ

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}\frac{y}{x} & , (x,y) \in Q_1 \\ \pi + \tan^{-1}\frac{y}{x} & , (x,y) \in Q_2, Q_3 \\ -\pi + \tan^{-1}\frac{y}{x} & , (x,y) \in Q_4 \end{cases}$$

ข้อสังเกต ถ้า $x = 0$ แล้ว $\tan^{-1}\frac{y}{x}$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น

ถ้า $y > 0$ เราให้ $r = |y|$ และ $\theta = \frac{\pi}{2}$ และ

ถ้า $y < 0$ เราให้ $r = |y|$ และ $\theta = -\frac{\pi}{2}$ หรือ $\theta = \frac{3\pi}{2}$

ตัวอย่าง 5.2.1 จงหาพิกัดฉากของจุดซึ่งมีพิกัดเชิงขั้วเป็นดังนี้

ก. จุด $A\left(6,\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$ ข. จุด $B\left(-6,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ ค. จุด $C\left(4,\ -\dfrac{11\pi}{6}\right)$ ง. จุด $D(8,\ 330^{\circ})$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5.2.2 จงหาพิกัดเชิงขั้วของจุดซึ่งมีพิกัดฉากเป็นดังนี้

ก. จุด $A(-2,\,-2)$ ข. จุด $B(2,\,-2\sqrt{3})$ ค. จุด $C(-2,\,2\sqrt{3})$ ง. จุด $D(3,\,0)$ จ. จุด $E(3,\,4)$

ตัวอย่าง 5.2.3 จงแสดงว่าจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้อยู่บนกราฟพิกัดเชิงขั้วซึ่งมีสมการ $r = \dfrac{2}{1-\cos\theta}$

ก. จุด $\left(2,\, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ข. จุด $\left(-2,\, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ ค. จุด $C\left(-1,\, 2\pi\right)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5.2.4 จงเปลี่ยนสมการพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปสมการพิกัดฉาก

ก. $r = 4\cos\theta$

ข. $r = \dfrac{4}{1-\sin\theta}$

ค. $r = \dfrac{2}{3-2\sin\theta}$

ง. $r = \dfrac{1}{r\cos 2\theta - 2\sin\theta}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

ตัวอย่าง 5.2.5 จงเปลี่ยนสมการในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปสมการพิกัดเชิงขั้ว

ก. $2x - 3y = 5$

ข. $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$

ค. $(x^2 + y^2)(x - y)^2 = 10$

5.3 การพิจารณากราฟของสมการในพิกัดเชิงขั้ว

บทนิยาม 5.3.1 กราฟของสมการ $r = f(\theta)$ ในพิกัดเชิงขั้ว คือ เซตของจุดทั้งหมด (r, θ) ซึ่งพิกัดสอดคล้องกับสมการเชิงขั้วนั้น

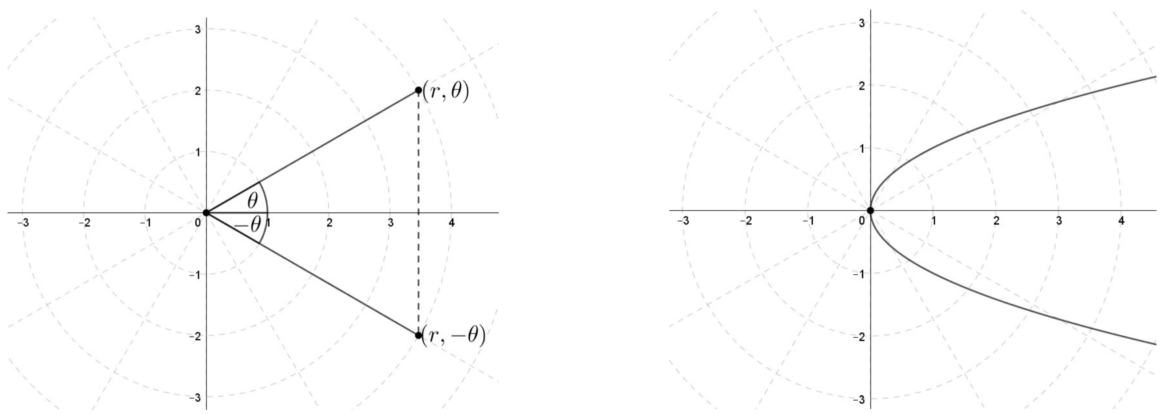
สำหรับในการวาดกราฟในระบบพิกัดเชิงขั้วนั้น กระทำได้เช่นเดียวกันกับการวาดกราฟในระบบพิกัดฉาก โดยเลือกค่า θ ต่าง ๆ จากค่า θ ที่เลือกสามารถนำมาคำนวณหา r จากสมการที่กำหนดให้ได้ จากนั้นนำค่า θ และ r ที่ได้แต่ละคู่ไปกำหนดตำแหน่งของจุดนั้น ๆ ลงในพิกัดเชิงขั้ว นอกจากนี้อาจ จะอาศัยลักษณะจำเพาะของเส้นโค้งเพื่อช่วยในการวาดกราฟด้วย เช่น การพิจารณาสมมาตรขอบเขต ระยะตัดแกน และขอบเขต เพื่อช่วยให้วาดกราฟได้รวดเร็ว และถูกต้องยิ่งขึ้น

5.3.1 การสมมาตรของสมการเชิงขั้ว

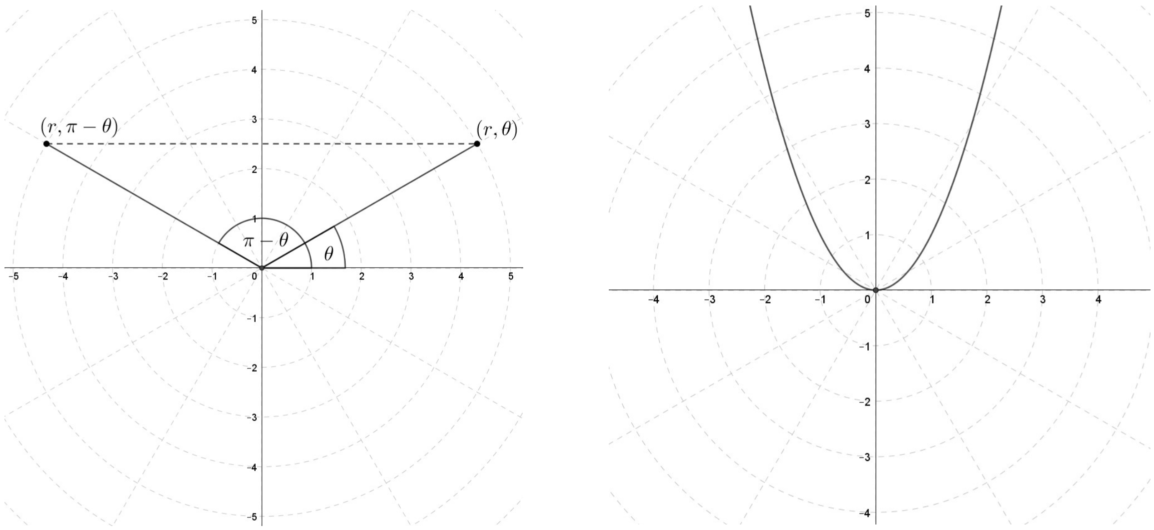
5.3.1.1 เส้นโค้งมีสมมาตรกับแกนเชิงขั้ว (แกน X) ถ้าแทน θ ด้วย $-\theta$ ในสมการเชิงขั้วแล้วสมการคงเดิม หรือถ้าแทน r ด้วย $-r$ และ θ ด้วย $\pi - \theta$ แล้วสมการคงเดิม ดังรูปที่ 5.17

5.3.1.2 เส้นโค้งมีสมมาตรกับแกนตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว ถ้าแทน θ ด้วย $\pi - \theta$ ในสมการเชิงขั้วแล้วสมการคงเดิม หรือถ้าแทน r ด้วย $-r$ และ θ ด้วย $-\theta$ แล้วสมการคงเดิม ดังรูปที่ 5.18

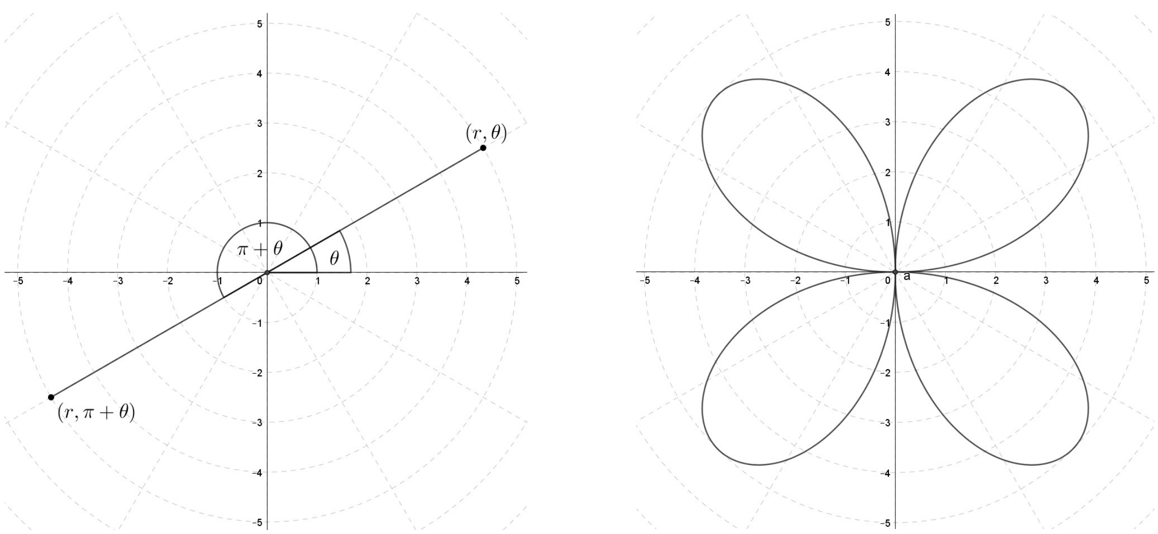
5.3.1.3 เส้นโค้งมีสมมาตรกับขั้ว (จุดกำเนิด) ถ้าแทน r ด้วย $-r$ ในสมการเชิงขั้วแล้วสมการคงเดิม หรือถ้าแทน θ ด้วย $\pi + \theta$ แล้วสมการคงเดิม ดังรูปที่ 5.19



รูปที่ 5.17 เส้นโค้งมีสมมาตรกับแกนเชิงขั้ว



รูปที่ 5.18 เส้นโค้งมีสมมาตรกับแกนตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว



รูปที่ 5.19 เส้นโค้งมีสมมาตรกับขั้ว

ข้อสังเกต

เส้นโค้งที่พิจารณาสมมาตรมี 3 ลักษณะ คือ สมมาตรเทียบกับแกนเชิงขั้ว กับแกนตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว และขั้ว เราพบว่า ถ้าเส้นโค้งมีสมมาตร 2 ลักษณะแล้ว เส้นโค้งจะสมมาตรลักษณะที่ 3 ด้วยเสมอ เช่น เส้นโค้งมีสมมาตรเทียบกับแกนเชิงขั้ว และมีสมมาตรเทียบกับแกนตั้งฉากกับแกนเชิงขั้วแล้ว เส้นโค้งจะต้องมีสมมาตรเทียบขั้วด้วย

ตัวอย่าง 5.3.1.1 จงพิจารณาเส้นโค้ง $r = 3 + 5\cos\theta$ ว่าสมมาตรกับแกนเชิงขั้ว แกนที่ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว และจุดขั้ว หรือไม่

ตัวอย่าง 5.3.1.2 จงพิจารณาเส้นโค้ง $r = 4\sin 3\theta$ ว่าสมมาตรกับแกนเชิงขั้ว แกนที่ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว และจุดขั้ว หรือไม่

ตัวอย่าง 5.3.1.3 จงพิจารณาเส้นโค้ง $r = 3\sin 4\theta$ ว่าสมมาตรกับแกนเชิงขั้ว แกนที่ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว และจุดขั้ว หรือไม่

5.3.2 ระยะตัดแกน (Intercepts)

การหาระยะตัดแกนเชิงขั้ว ให้ $\theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ แล้วหาค่า r ออกมา จะได้พิกัด (r, θ) เป็นจุดตัดแกนเชิงขั้ว

การหาระยะตัดแกนที่ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว (แกน Y) ให้ $\theta = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$ แล้วหาค่า r ออกมา จะได้พิกัด (r, θ) เป็นจุดตัดแกนที่ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว (แกน Y)

ตัวอย่าง 5.3.2.1 จงพิจารณาจุดตัดแกนเชิงขั้ว และแกนตั้งฉากกับแกนเชิงขั้วของ $r = 3(1 - \sin\theta)$

ตัวอย่าง 5.3.2.2 จงพิจารณาจุดตัดแกนเชิงขั้ว และแกนตั้งฉากกับแกนเชิงขั้วของ $r = 3(1 - 2\cos\theta)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5.3.3 ขอบเขตของ r (Bound of r)

พิจารณาขอบเขตของ r สำหรับทุก ๆ ค่า θ ที่หาค่า r ได้ เนื่องจากฟังก์ชันของ r เป็นฟังก์ชันของ sine หรือ cosine ดังนั้น

r จะมีขอบเขต ถ้ามี $M > 0$ ซึ่ง $\left|r\right| \leq M$ ทุกค่า θ กราฟจะเป็นเส้นโค้งปิด

r จะไม่มีขอบเขต ถ้าค่าของ $\left|r\right|$ เพิ่มขึ้นโดยไม่มีขีดจำกัด เมื่อค่า θ เพิ่มขึ้น กราฟจะเป็นเส้นโค้งเปิด

ตัวอย่าง 5.3.3.1 จงพิจารณาขอบเขตของเส้นโค้ง $r = 3(1+\cos\theta)$

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5.3.3.1 จงพิจารณาขอบเขตของเส้นโค้ง $r = \dfrac{15}{3-2\cos\theta}$

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5.3.1 จงเขียนกราฟของสมการ $r = 2 + 2\sin\theta$

ตัวอย่าง 5.3.2 จงเขียนกราฟของ $r = 8\cos\theta$

5.4 กราฟของสมการในพิกัดเชิงขั้ว (Graphs of Polar Coordinate Equation)

ในหัวข้อนี้จะศึกษากราฟของเส้นโค้งบางชนิดในพิกัดเชิงขั้ว เนื่องจากในการแก้ปัญหาเรามักใช้ทั้งพิกัดฉาก และพิกัดเชิงขั้วควบคู่กันไป จึงกำหนดให้แกน X ทับแกนเชิงขั้ว ซึ่งมีวิธีการเขียนกราฟโดยการเปลี่ยนสมการในพิกัดเชิงขั้วให้เป็นสมการในพิกัดฉากก่อน แล้วใช้ความรู้พื้นฐานภาคตัดกรวยมาช่วยในการเขียนกราฟ แต่ยังมีสมการในพิกัดเชิงขั้วที่ถึงแม้จะเปลี่ยนให้เป็นสมการในพิกัดฉากแล้วแต่รูปแบบที่ได้ไม่ตรงกับสมการของภาคตัดกรวยใด ๆ เลย กรณีเช่นนี้จะต้องใช้พิกัดเชิงขั้วในการเขียนกราฟโดยตรง

5.4.1 สมการเส้นตรง (Line)

เส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน X ในระบบพิกัดฉากมีสมการคือ $x = a$ เมื่อ a เป็นค่าคงที่ จากความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดฉากกับระบบพิกัดเชิงขั้ว จึงได้ว่า $r\cos\theta = a$

....

....

....

....

....

....

....

เส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน ในระบบพิกัดฉากมีสมการคือ $y = b$ เมื่อ b เป็นค่าคงที่ จากความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดฉากกับระบบพิกัดเชิงขั้ว จึงได้ว่า $r\sin\theta = b$

....

....

....

....

....

....

....

....

เส้นตรงที่ผ่านขั้วและทำมุม θ กับแกนเชิงขั้ว คือ $\theta = a$ เมื่อ a เป็นค่าคงที่

ตัวอย่าง 6.1.1 จงเขียนกราฟของสมการในพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้

ก. $r\cos\theta = 3$ ข. $r\sin\theta = -4$ ค. $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$ ง. $r = \dfrac{2}{2\cos\theta + \sin\theta}$

5.4.2 สมการวงกลม (Circle)

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ขั้วอยู่ในรูป $r = a$ เมื่อ a เป็นค่าคงที่

....

....

....

....

....

....

....

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(\frac{a}{2},\, 0\right)$ อยู่ในรูป $r = a\cos\theta$ เมื่อ a เป็นค่าคงที่

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(0, \dfrac{a}{2}\right)$ อยู่ในรูป $r = a\sin\theta$ เมื่อ a เป็นค่าคงที่

....

....

....

....

....

....

....

....

....

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$ อยู่ในรูป $r = a\cos\theta + b\sin\theta$ เมื่อ a และ b เป็นค่าคงที่

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

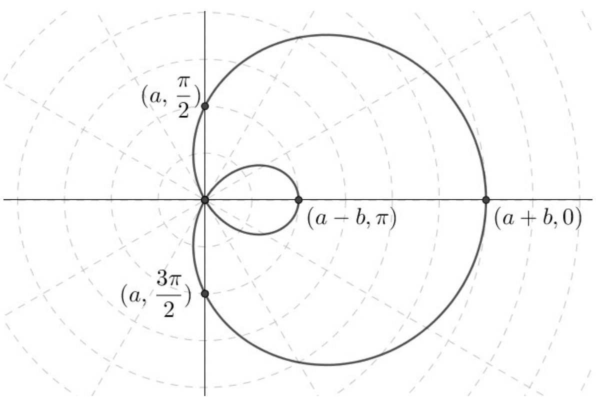
....

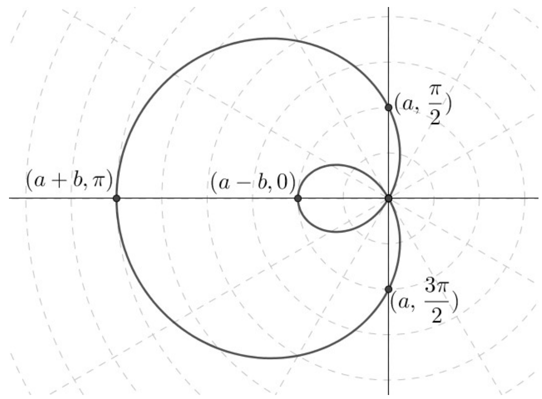
5.4.3 เส้นโค้งรูปเชิงขั้วชนิดพิเศษ (Special Polar – From Curves)

เส้นโค้งลีมาซอง (Limacons) สมการอยู่ในรูป

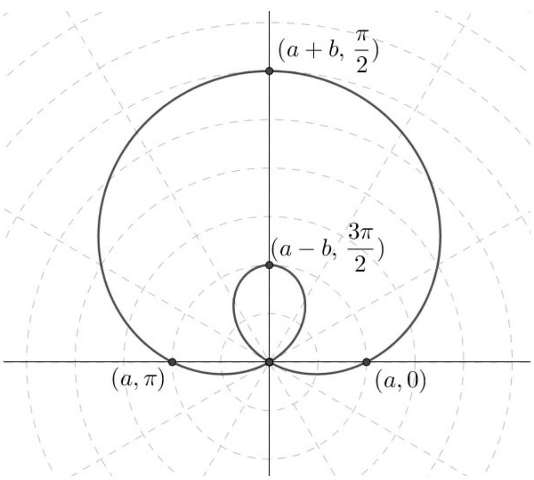
$$r = a \pm b\cos\theta \text{ หรือ } r = a \pm b\sin\theta$$

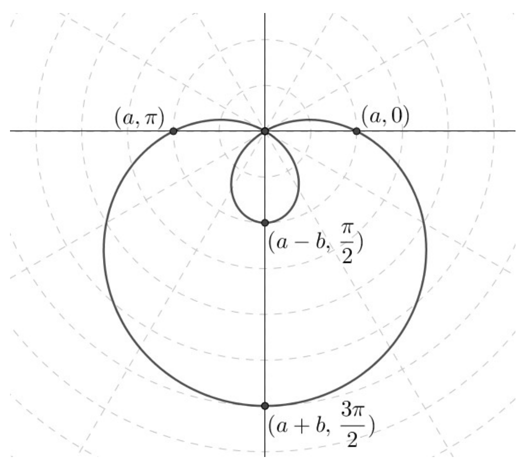
ถ้า $0 < a < b$ เส้นโค้งลีมาซองจะมีบ่วง (loop) อยู่ข้างใน





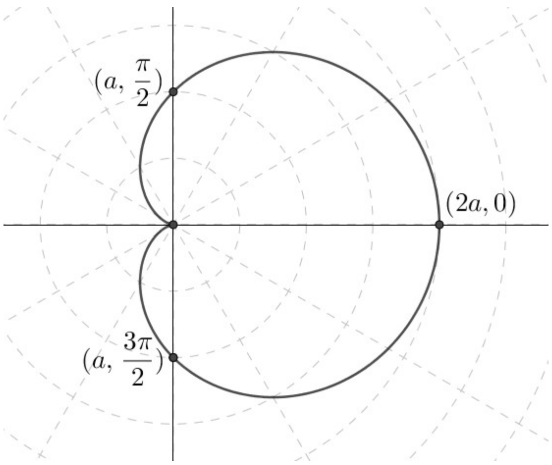
กราฟ $r = a + b\cos\theta$ กราฟ $r = a - b\cos\theta$



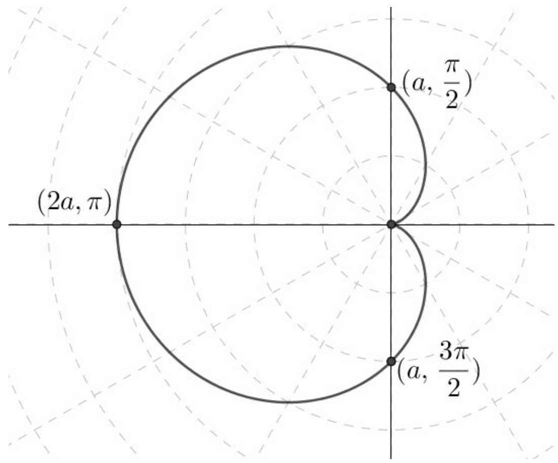


กราฟ $r = a + b\sin\theta$ กราฟ $r = a - b\sin\theta$

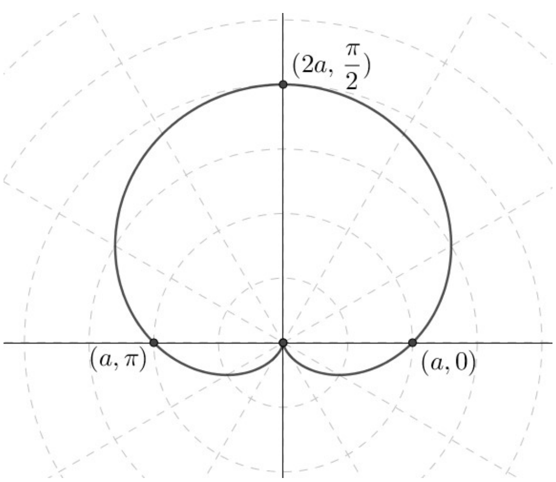
ถ้า $a = b,\ a > 0$ ลีมาซองจะเรียกว่า คาดิออยด์ (Cardioids) หรือรูปหัวใจ



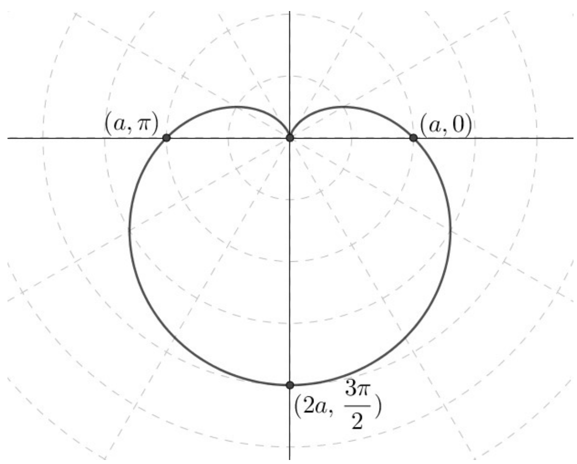
กราฟ $r = a(1 + \cos\theta)$



กราฟ $r = a(1 - \cos\theta)$

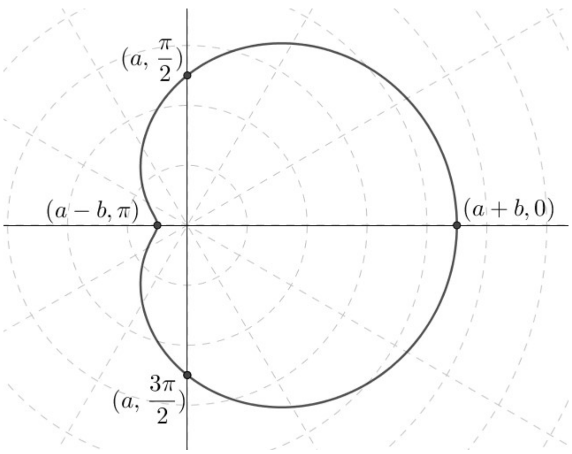


กราฟ $r = a(1 + \sin\theta)$

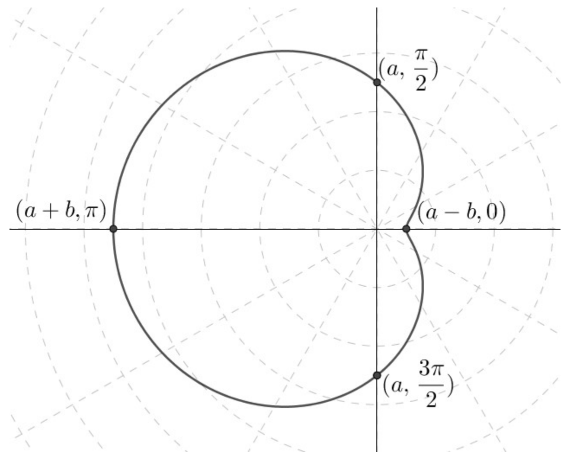


กราฟ $r = a(1 - \sin\theta)$

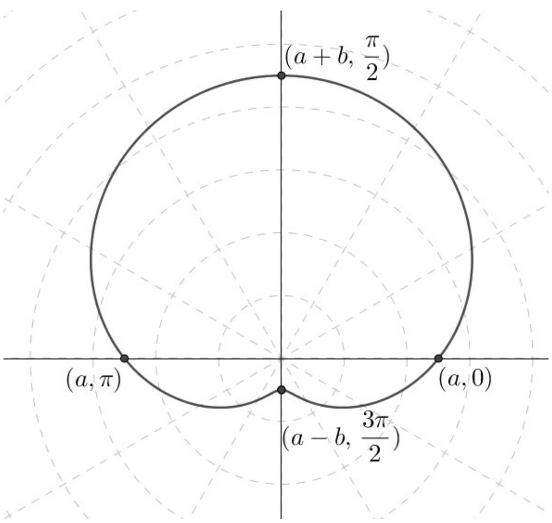
ถ้า $a > b$ ลีมาซองจะไม่มีเส้นสัมผัสกับกราฟที่ขั้ว



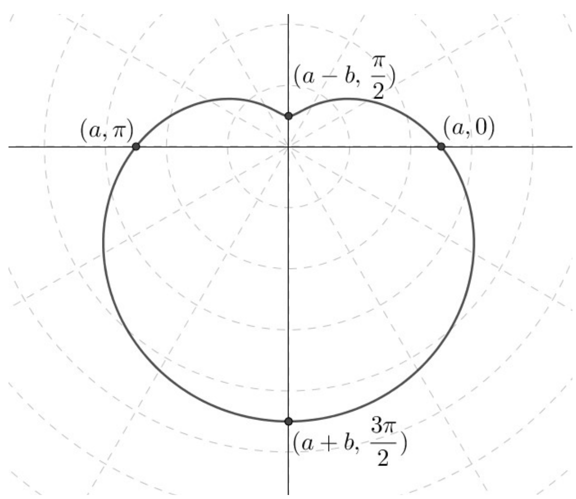
กราฟ $r = a + b\cos\theta$



กราฟ $r = a - b\cos\theta$



กราฟ $r = a + b\sin\theta$

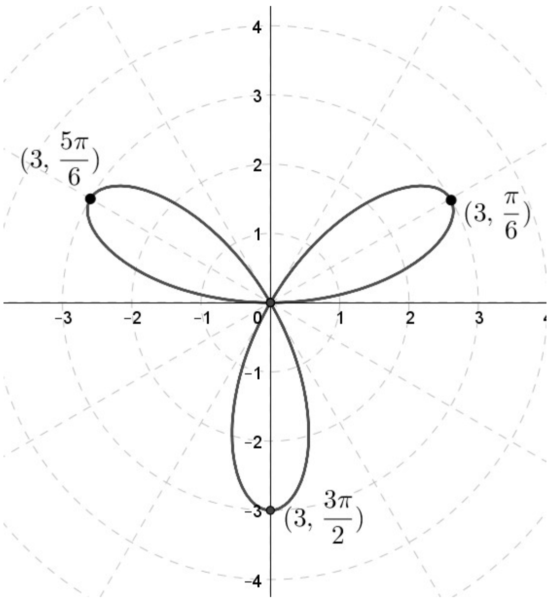


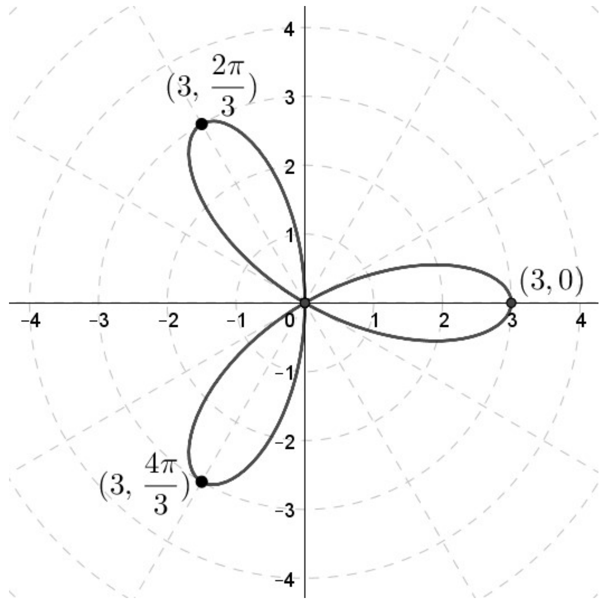
กราฟ $r = a - b\sin\theta$

เส้นโค้งกลีบกุหลาบ (Rose Curves) สมการอยู่ในรูป

$$r = a\cos n\theta \text{ หรือ } r = a\sin n\theta$$

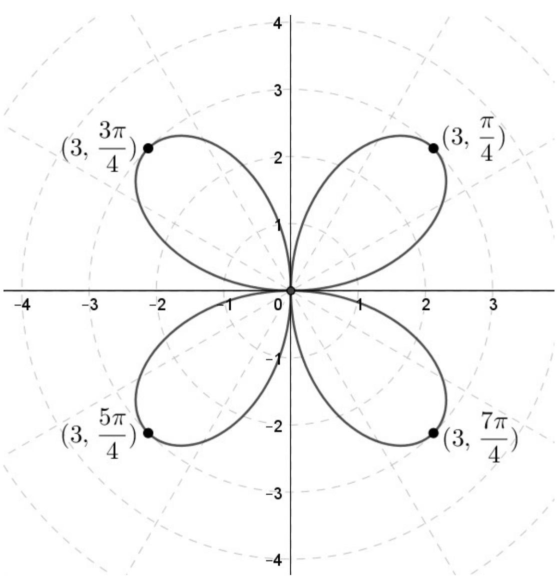
ถ้า n เป็นจำนวนคี่ กราฟจะมี n กลีบ

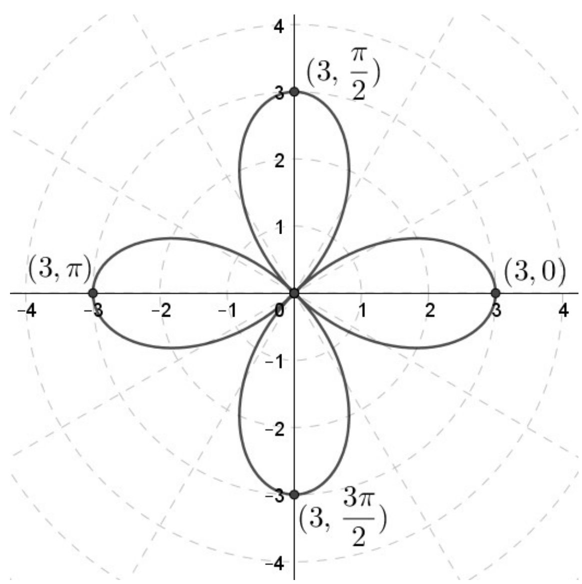




กราฟ $r = 3\sin 3\theta$ กราฟ $r = 3\cos 3\theta$

ถ้า n เป็นจำนวนคู่ กราฟจะมี $2n$ กลีบ

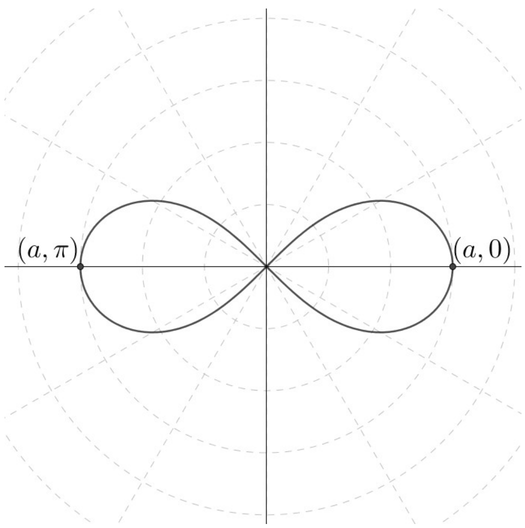




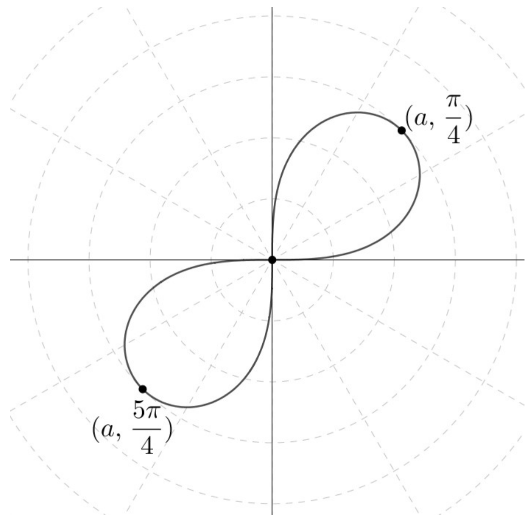
กราฟ $r = 3\sin 2\theta$ กราฟ $r = 3\cos 2\theta$

เส้นโค้งเลมนิสเคต (Limniscates) สมการอยู่ในรูป

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta \text{ หรือ } r^2 = a^2 \sin 2\theta$$



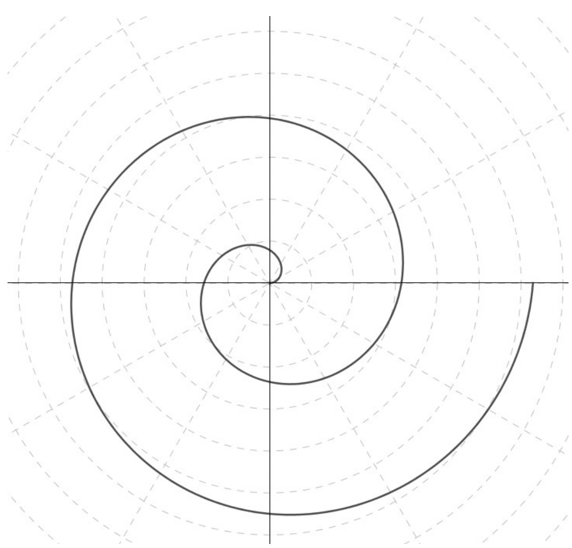
กราฟ $r^2 = a^2 \cos 2\theta$



กราฟ $r^2 = a^2 \sin 2\theta$

เส้นเวียนก้นหอย (Spirals) สมการอยู่ในรูป

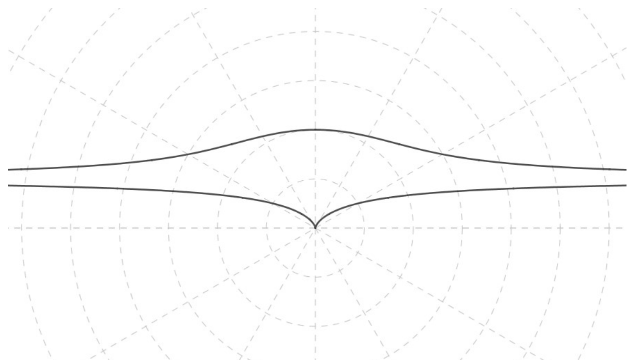
$$r = a\theta, a > 0$$



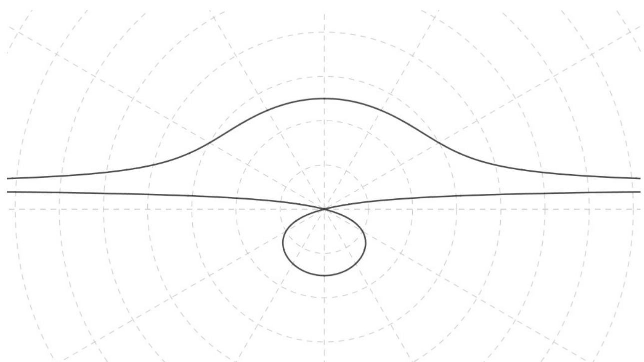
กราฟ $r = a\theta$

เส้นโค้งคอนคอยด์ (Conchoids) สมการอยู่ในรูป

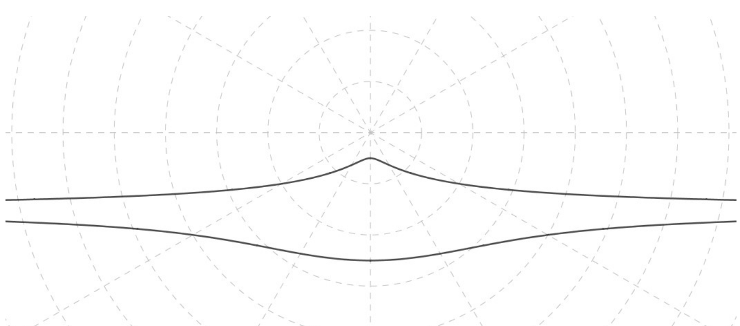
$$r = a\csc\theta \pm b$$



กราฟ $r = 2\csc\theta + 2$



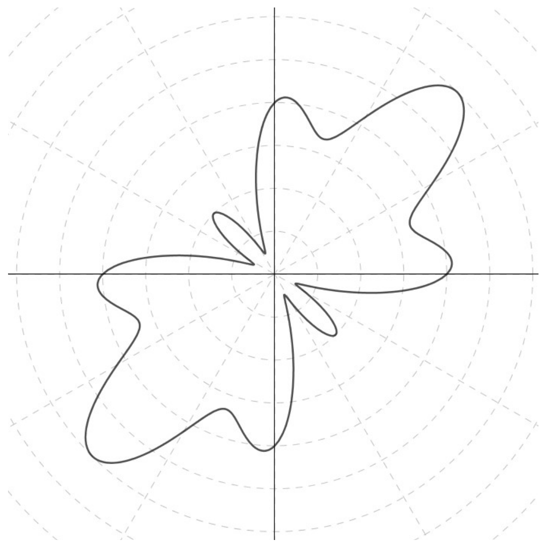
กราฟ $r = \csc\theta - 4$



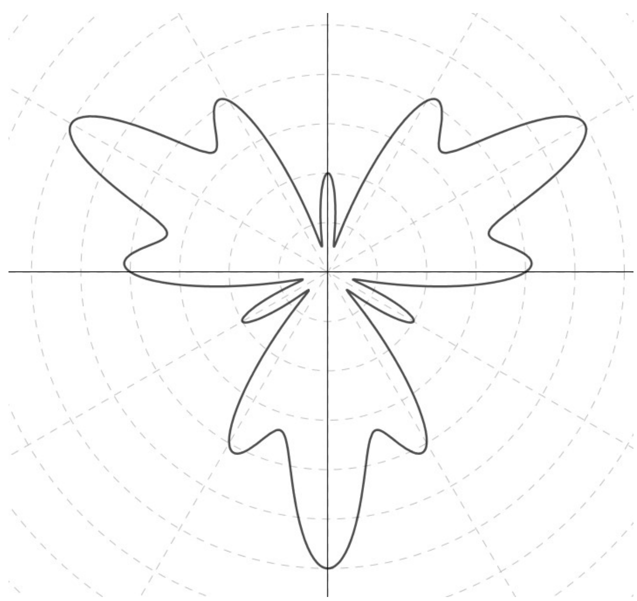
กราฟ $r = -3\csc\theta + 2$

เส้นโค้งผีเสื้อ (Butterflies Curves) สมการอยู่ในรูป

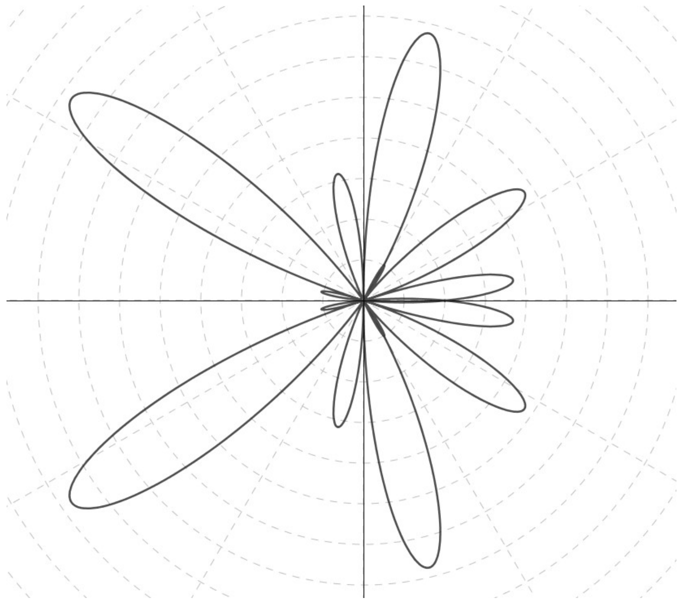
$r = 1 + \sin(n\theta) + \cos^2(2n\theta)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก



กราฟ $r = 1 + \sin(2\theta) + \cos^2(4\theta)$



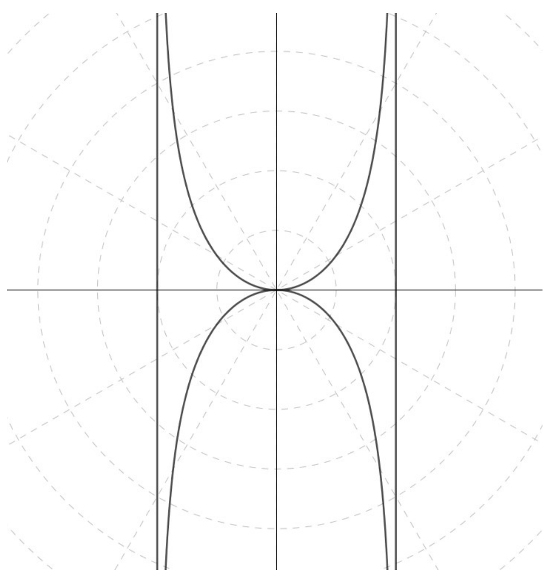
กราฟ $r = 1 + \sin(2\theta) + \cos^2(4\theta)$



กราฟ $r = (2 + 7\sin(3\theta))\cos 5\theta$

เส้นโค้งแคปปา (Kappa Curves) สมการอยู่ในรูป

$$r = a\tan\theta$$



กราฟ $r = 2\tan\theta$

5.5 จุดตัดของกราฟในพิกัดเชิงขั้ว (Intersections of Polar Coordinates Graphs)

การหาจุดตัดของเส้นโค้ง สองเส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้ว นอกจากจะแก้สมการเส้นโค้งทั้งสอง แล้ว ควรหาจุดตัดอื่น ๆ เพิ่มอีกโดย

- ดูจากกราฟของเส้นโค้ง
- เส้นโค้งที่อยู่ในรูปของสมการ $r = f(\theta)$ อาจเขียนแทนด้วย $(-1)^n r = f(\theta + n\pi)$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม
- ตรวจสอบว่าเส้นโค้งทั้งสองผ่านจุดขั้วหรือจุดกำเนิดหรือไม่ โดยให้ $r = 0$ ถ้าหา θ ได้จากสมการเส้นโค้งทั้งสองแสดงว่าจุดขั้วหรือจุดกำเนิดเป็นจุดตัดด้วย

ตัวอย่าง 5.5.1 จงหาจุดตัดของเส้นโค้ง $r = 4\sin\theta$ และ $r = 4\cos\theta$

ตัวอย่าง 5.5.2 จงหาจุดตัดของเส้นโค้ง $r = 6\sin\theta$ และ $r = 6\cos 2\theta$

ตัวอย่าง 5.5.3 จงหาจุดตัดของเส้นโค้ง $r\cos\theta = 2$ และ $r = 2 + 4\cos\theta$

5.6 สมการเชิงขั้วของภาคตัดกรวย (Polar Equation of Conic Section)

เราใช้คุณสมบัติของจุดโฟกัสและเส้นไดเรกตริกซ์ของภาคตัดกรวย สำหรับหาสมการเชิงขั้วของภาคตัดกรวย สมการสามารถหาได้ในรูปแบบง่าย ๆ ดังนี้

- สมการภาคตัดกรวยซึ่งมีจุดโฟกัสที่ขั้ว เส้นไดเรกตริกซ์ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้วและอยู่ห่างจากจุดขั้วไปทางซ้าย k หน่วย เมื่อ e เป็นค่าเยื้องศูนย์กลาง

- สมการภาคตัดกรวยซึ่งมีจุดโฟกัสที่ขั้ว เส้นไดเรกตริกซ์ขนานกับแกนเชิงขั้วและอยู่ห่างจากจุดขั้ว ไปด้านล่าง k หน่วย เมื่อ e เป็นค่าเยื้องศูนย์กลาง

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

หมายเหตุ

ถ้า $e = 0$ กราฟเป็น วงกลม

ถ้า $e = 1$ กราฟเป็น พาราโบลา

ถ้า $0 < e < 1$ กราฟเป็น วงรี

ถ้า $e > 1$ กราฟเป็น ไฮเพอร์โบลา

ตัวอย่าง 5.6.1 จงวาดกราฟของสมการ $r = 4$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5.6.2 จงวาดกราฟของสมการ $r = \dfrac{15}{3 - 2\cos\theta}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5.6.3 จงวาดกราฟของสมการ $r = \dfrac{6}{1 + 2\sin\theta}$

ตัวอย่าง 5.6.4 จงวาดกราฟของสมการ $r = \dfrac{10}{3 + 3\cos\theta}$

ตัวอย่าง 5.6.5 จงหาสมการเชิงขั้วของภาคตัดกรวยที่จุดโฟกัสอยู่ที่จุดกำเนิด จุดยอดอยู่ที่ $\left(3, \dfrac{\pi}{2}\right)$ และจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(1, -\dfrac{\pi}{2}\right)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5.7 สมการอิงตัวแปรเสริม (Parametric Equations)

การวาดกราฟในระนาบโดยใช้สองตัวแปร x และ y ในระบบพิกัดฉาก หรือ r และ θ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ของสองตัวแปรนั้น นั่นคือ

$y = f(x)$ เมื่อ y เป็นฟังก์ชันของ x หรือ

$r = f(\theta)$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันของ θ

ในที่นี้เราจะหาความสัมพันธ์ของตัวแปร x และ y ในเทอมของตัวแปรที่สามซึ่งเรียกว่า ตัวแปรเสริม ปัจจุบันเทคโนโลยีด้านคอมพิวเตอร์ได้พัฒนาโปรแกรมช่วยวาดกราฟทั้งในสองมิติ และสามมิติ เป็นจำนวนมาก และการกำหนดเส้นโค้งในระนาบ XY นิยมกำหนดเส้นโค้งในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม

บทนิยาม 5.7.1 ถ้าฟังก์ชัน f และ ในโดเมน S แล้วสมการ $x = f(t),\, y = g(t)$ สำหรับ t ใน S เป็นสมการอิงตัวแปรเสริม (Parametric Equations) ของเส้นโค้งซึ่งรวมจุด $(f(t),\, g(t))$ ทั้งหมดสำหรับ t ใน S ตัวแปร t เรียกว่า ตัวแปรเสริม

5.7.1 สมการเส้นตรง

สมการอยู่ในรูป $x = f(t),\, y = g(t)$ เมื่อ t เป็นตัวแปรเสริม

ตัวอย่าง 5.7.1 จงวาดกราฟของสมการ $x = t + 2,\, y = 3t - 1$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5.7.2 สมการวงกลม

- สมการ $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ เมื่อ θ เป็นตัวแปรเสริม $0 \le \theta \le 2\pi$ มีกราฟเป็นวงกลมจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด รัศมี r หน่วย
- สมการ $x = h + r\cos\theta,\ y = k + r\sin\theta$ เมื่อ θ เป็นตัวแปรเสริม $0 \le \theta \le 2\pi$ มีกราฟเป็นวงกลมจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(h,\, k)$ รัศมี r หน่วย

ตัวอย่าง 5.7.2.1 จงวาดกราฟของสมการ $x = 2\cos\theta,\ y = 2\sin\theta$

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5.7.2.2 จงวาดกราฟของสมการ $x = 1 + 3\cos\theta,\ y = 2 + 3\sin\theta$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5.7.3 สมการพาราโบลา

- สมการ $x = a\cos\theta,\, y = b\sin^2\theta$ เมื่อ θ เป็นตัวแปรเสริม $0 \le \theta \le \pi$ มีกราฟเป็นพาราโบลาคว่ำ จุดยอดอยู่ที่ $\left(0, -\dfrac{b}{a}\right)$
- สมการ $x = a + t,\, y = b + t^2$ เมื่อ t เป็นตัวแปรเสริม $-\infty < t < \infty$ มีกราฟเป็นพาราโบลาหงาย จุดยอดอยู่ที่ $(a,\, b)$
- สมการ $x = a + t^2,\, y = b + t$ เมื่อ t เป็นตัวแปรเสริม $-\infty < t < \infty$ มีกราฟเป็นพาราโบลาตะแคงซ้าย จุดยอดอยู่ที่ $(a,\, b)$

ตัวอย่าง 5.7.3.1 จงวาดกราฟของสมการอยู่ในรูป $x = \cos^2\theta,\, y = 2\sin\theta$

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5.7.3.2 จงวาดกราฟของสมการอยู่ในรูป $x = t + 2,\, y = 3 - t^2$

....

....

....

....

....

....

....

....

5.7.4 สมการวงรี

- สมการ $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$ เมื่อ θ เป็นตัวแปรเสริม $0 \le \theta \le 2\pi$ มีกราฟเป็นวงรีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด

- สมการ $x = h + a\cos\theta,\ y = k + b\sin\theta$ เมื่อ θ เป็นตัวแปรเสริม $0 \le \theta \le 2\pi$ มีกราฟเป็นวงรีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(h,\ k)$

ตัวอย่าง 5.7.4.1 จงวาดกราฟของสมการ $x = \cos\theta,\ y = 2\sin\theta$

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 6.4.4.2 จงวาดกราฟของสมการ $x = 3\cos t - 3,\ y = 1 + \sin t$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5.7.5 สมการไฮเพอร์โบลา

- สมการ $x = a\sec\theta,\, y = b\tan\theta$ เมื่อ θ เป็นตัวแปรเสริม $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ มีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลาจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด แกนขวางคือแกน X

- สมการ $x = h + a\tan\theta,\, y = k + b\sec\theta$ เมื่อ θ เป็นตัวแปรเสริม $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ มีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลาจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h,k) แกนขวางคือแกน X

ตัวอย่าง 5.7.5.1 จงวาดกราฟของสมการ $x = 2\tan\theta,\, y = 3\sec\theta$

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5.7.5.2 จงวาดกราฟของสมการ $x = 3\sec t + 2,\, y = \tan t + 2$

....

....

....

....

....

....

....

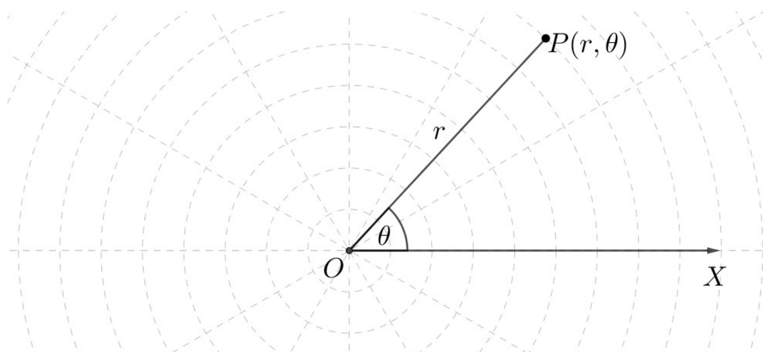
....

....

สรุปท้ายบทที่ 5

สำหรับในบทที่ 5 นั้นเราได้ศึกษานั้นเราได้ศึกษาระบบพิกัดเชิงขั้ว ในการศึกษาแคลคูลัสใน 2 มิติ เราแสดงพิกัดของจุดบนระนาบได้ ระนาบที่กล่าวมาคือระบบพิกัดฉาก แต่ยังมีอีกระบบหนึ่งซึ่งสามารถระบุตำแหน่งบนระนาบ 2 มิติได้เช่นกัน คือ ระบบพิกัดเชิงขั้ว ซึ่งปัญหาในทางแคลคูลัสหลาย ปัญหาเมื่อเราใช้ระบบพิกัดฉากไปแก้ปัญหา พบว่าปัญหานั้นมีความยุ่งยากและซับซ้อน แต่เมื่อเราเปลี่ยนวิธีคิดโดยการเปลี่ยนจากระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดเชิงขั้ว ปัญหานั้นก็จะง่ายลง

ในระบบพิกัดเชิงขั้วนี้ประกอบไปด้วย แกนเชิงขั้ว (Polar Axis) ซึ่งเป็นรังสี $\overrightarrow{OX}$ บนระนาบ เรียกจุด O ว่าจุดกำเนิด (Origin) หรือ ขั้ว (Pole) และส่วนของเส้นตรง OP เขียนแทนด้วย r เรียกว่า เวกเตอร์รัศมี (Radius Vector) θ เรียกว่า มุมเชิงขั้ว (Polar Angle) ดังรูป



ซึ่งระบบพิกัดเชิงขั้วจะบอกพิกัดเป็น (r,θ) โดยความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉากและพิกัดเชิงขั้วเป็นดังนี้ $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$

ค่า r หาได้จาก $r = \sqrt{x^2+y^2}$ เมื่อ r คือรัศมีที่ลากออกจากจุดขั้วหรือจุดกำเนิด

ค่า θ หาได้จาก $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ เมื่อ θ คือเส้นรัศมีทำมุมกับแกนเชิงขั้วหรือแกน X

- มุม θ มีค่าเป็นบวก ถ้าวัดทวนเข็มนาฬิกาจากแกนเชิงขั้ว
- มุม θ มีค่าเป็นลบ ถ้าวัดตามเข็มนาฬิกาจากแกนเชิงขั้ว

สังเกตว่า θ ที่สอดคล้องกับ $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ มีได้หลายค่า ในการหาพิกัดเชิงขั้วจากระบบพิกัดฉาก เราจึงจะไม่เพียงแค่เลือกค่า θ ใด ๆ ที่สอดคลองกับ $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ แต่จะต้องเลือก θ ที่ทำให้จุด (r,θ) อยู่ในจตุภาคที่ตรงกับที่ต้องการด้วย นั่นหมายความว่า จุดในระบบพิกัดเชิงขั้วจุดเดียวสามารถเขียนได้หลายแบบ ซึ่งต่างจากระบบพิกัดฉากที่สามารถเขียนได้แบบเดียวเท่านั้น

สำหรับในการวาดกราฟในระบบพิกัดเชิงขั้วนั้น กระทำได้เช่นเดียวกันกับการวาดกราฟในระบบพิกัดฉาก โดยเลือกค่า θ ต่าง ๆ จากค่า θ ที่เลือกสามารถนำมาคำนวณหา r จากสมการที่กำหนดให้ได้ จากนั้นนำค่า θ และ r ที่ได้แต่ละคู่ไปกำหนดตำแหน่งของจุดนั้น ๆ ลงในพิกัดเชิงขั้ว นอกจากนี้เราจะพิจารณาลักษณะจำเพาะของเส้นโค้งเพื่อช่วยในการวาดกราฟได้รวดเร็ว และถูกต้องยิ่งขึ้น ดังนี้

พิจารณาการสมมาตรของสมการเชิงขั้ว

1. เส้นโค้งมีสมมาตรกับแกนเชิงขั้ว (แกน X) ถ้าแทน θ ด้วย $-\theta$ ในสมการเชิงขั้วแล้วสมการคงเดิม หรือถ้าแทน r ด้วย $-r$ และ θ ด้วย $\pi-\theta$ แล้วสมการคงเดิม

2. เส้นโค้งมีสมมาตรกับแกนตั้งฉากกับขั้ว (แกน Y) ถ้าแทน θ ด้วย $\pi-\theta$ ในสมการเชิงขั้วแล้วสมการคงเดิม หรือถ้าแทน r ด้วย $-r$ และ θ ด้วย $-\theta$ แล้วสมการคงเดิม

3. เส้นโค้งมีสมมาตรกับขั้ว (จุดกำเนิด) ถ้าแทน r ด้วย $-r$ ในสมการเชิงขั้วแล้วสมการคงเดิม หรือถ้าแทน θ ด้วย $\pi+\theta$ แล้วสมการคงเดิม

เส้นโค้งที่พิจารณาการสมมาตรมี 3 ลักษณะ คือ สมมาตรเทียบกับแกนเชิงขั้ว กับแกนตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว และจุดขั้ว เราพบว่า ถ้าเส้นโค้งมีสมมาตร 2 ลักษณะแล้ว เส้นโค้งจะสมมาตรลักษณะที่ 3 ด้วยเสมอ เช่น เส้นโค้งมีสมมาตรเทียบกับแกนเชิงขั้ว และมีสมมาตรเทียบกับแกนตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว แล้ว เส้นโค้งจะต้องมีสมมาตรเทียบขั้วด้วย

พิจารณาระยะตัดแกน

การหาระยะตัดแกนเชิงขั้ว ให้ $\theta=0,\pm\pi,\pm 2\pi,\pm 3\pi,\ldots$ แล้วหาค่า r ออกมา จะได้พิกัด (r,θ) เป็นจุดตัดแกนเชิงขั้ว

การหาระยะตัดแกนที่ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว (แกน Y) ให้ $\theta=\pm\dfrac{\pi}{2},\pm\dfrac{3\pi}{2},\pm\dfrac{5\pi}{2},\ldots$ แล้วหาค่า r ออกมา จะได้พิกัด (r,θ) เป็นจุดตัดแกนที่ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว (แกน Y)

พิจารณาขอบเขต

พิจารณาขอบเขตของ r สำหรับทุก ๆ ค่า θ ที่หาค่า r ได้ เนื่องจากฟังก์ชันของ r เป็นฟังก์ชันของ $\sin$ หรือ $\cos$ ดังนั้น

r จะมีขอบเขต ถ้ามี $M>0$ ซึ่ง $|r|\le M$ ทุกค่า θ กราฟจะเป็นเส้นโค้งปิด

r จะไม่มีขอบเขต ถ้าค่าของ $|r|$ เพิ่มขึ้นโดยไม่มีขีดจำกัด เมื่อค่า θ เพิ่มขึ้น กราฟจะเป็นเส้นโค้งเปิด

สมการเชิงขั้วและสมการอิงตัวแปรเสริม ซึ่งกราฟของสมการในพิกัดเชิงขั้ว ประกอบไปด้วย

1. สมการเส้นตรงสามารถเขียนได้ดังนี้
   - สมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว คือ $r\cos\theta=\pm a$

- สมการเส้นตรงที่ขนานกับแกนเชิงขั้ว คือ $r\sin\theta = \pm a$
- สมการเส้นตรงที่ผ่านจุดขั้ว คือ $\theta = \pm a$

2. สมการวงกลมสามารถเขียนได้ดังนี้
   - สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ขั้วอยู่ในรูป $r = a$
   - สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(\frac{a}{2},\, 0\right)$ อยู่ในรูป $r = a\cos\theta$
   - สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(0,\, \frac{a}{2}\right)$ อยู่ในรูป $r = a\sin\theta$
   - สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(\frac{a}{2},\, \frac{b}{2}\right)$ อยู่ในรูป $r = a\cos\theta + b\sin\theta$
3. สมการเส้นโค้งรูปเชิงขั้วชนิดพิเศษสามารถเขียนได้ดังนี้
   - เส้นโค้งลีมาซอง สมการอยู่ในรูป $r = a \pm b\cos\theta$ หรือ $r = a \pm b\sin\theta$
   - เส้นโค้งกลีบกุหลาบ สมการอยู่ในรูป $r = a\cos n\theta$ หรือ $r = a\sin n\theta$
   - เส้นเวียนก้นหอย สมการอยู่ในรูป $r = a\theta$
   - เส้นโค้งคอนคอยด์ สมการอยู่ในรูป $r = a\csc\theta \pm b$
   - เส้นโค้งผีเสื้อ สมการอยู่ในรูป $r = 1 + \sin(n\theta) + \cos^2(2n\theta)$
   - เส้นโค้งแคปปา สมการอยู่ในรูป $r = a\tan\theta$

การหาจุดตัดของเส้นโค้งสองเส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้ว นอกจากจะแก้สมการเส้นโค้งทั้งสอง แล้ว ควรหาจุดตัดอื่น ๆ เพิ่มอีกโดย

1. ดูจากกราฟของเส้นโค้ง

2. เส้นโค้งที่อยู่ในรูปของสมการ $r = f(\theta)$ อาจเขียนแทนด้วย $(-1)^n r = f(\theta + n\pi)$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม

3. ตรวจสอบว่าเส้นโค้งทั้งสองผ่านจุดขั้วหรือจุดกำเนิดหรือไม่ โดยให้ $r = 0$ ถ้าหา θ ได้จากสมการเส้นโค้งทั้งสองแสดงว่าจุดขั้วหรือจุดกำเนิดเป็นจุดตัดด้วย

เราจะหาความสัมพันธ์ของตัวแปร x และ y ในเทอมของตัวแปรที่สามซึ่งเรียกว่า **ตัวแปรเสริม** ปัจจุบันเทคโนโลยีด้านคอมพิวเตอร์ได้พัฒนาโปรแกรมช่วยวาดกราฟทั้งในสองมิติ และสามมิติ เป็นจำนวนมาก และการกำหนดเส้นโค้งในระนาบ XY นิยมกำหนดเส้นโค้งในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม

ถ้าฟังก์ชัน f และ ในโดเมน S แล้วสมการ $x = f(t),\, y = g(t)$ สำหรับ t ใน S เป็นสมการอิงตัวแปรเสริม (Parametric Equations) ของเส้นโค้งซึ่งรวมจุด $(f(t),\, g(t))$ ทั้งหมดสำหรับ t ใน S ตัวแปร t เรียกว่า ตัวแปรเสริม โดยเส้นสมการเส้นโค้งที่พิจารณามีดังนี้

1. สมการเส้นตรงอยู่ในรูป $x = f(t),\ y = g(t)$
2. สมการวงกลมประกอบไปด้วย
   - สมการวงกลมจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดอยู่ในรูป $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$
   - วงกลมจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(h,\ k)$ อยู่ในรูป $x = h + r\cos\theta,\ y = k + r\sin\theta$
3. สมการพาราโบลาประกอบไปด้วย
   - สมการพาราโบลาคว่ำ จุดยอดอยู่ที่ $\left(0, -\dfrac{b}{a}\right)$ อยู่ในรูป $x = a\cos t,\ y = b\sin^2 t$
   - สมการพาราโบลาหงาย จุดยอดอยู่ที่ $(a,\ b)$ อยู่ในรูป $x = a + t,\ y = b + t^2$
   - สมการพาราโบลาตะแคงซ้าย จุดยอดอยู่ที่ $(a,\ b)$ อยู่ในรูป $x = a + t^2,\ y = b + t$
   - สมการพาราโบลาตะแคงขวา จุดยอดอยู่ที่ $(a,\ b)$ อยู่ในรูป $x = a + t,\ y = b + t^2$
4. สมการวงรีประกอบไปด้วย
   - สมการวงรีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดอยู่ในรูป $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$
   - สมการวงกลมจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(h,\ k)$ อยู่ในรูป

$$x = h + a\cos\theta,\ y = k + b\sin\theta$$

5. สมการไฮเพอร์โบลาประกอบไปด้วย
   - สมการไฮเพอร์โบลาจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดอยู่ในรูป $x = a\sec\theta,\ y = b\tan\theta$
   - สมการไฮเพอร์โบลาจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(h,\ k)$ อยู่ในรูป

$x = h + a\tan\theta,\ y = k + b\sec\theta$

แบบฝึกหัดบทที่ 5

จงลงจุดในระบบพิกัดเชิงขั้วบนระนาบพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้ (ข้อ 5.1 - 5.8)

5.1 $A(3,60^\circ), B(4,45^\circ), C(5,30^\circ)$

5.2 $D(-3,60^\circ), E(-4,45^\circ), F(-5,30^\circ)$

5.3 $G(1,20^\circ), H(-2,135^\circ), I(7,330^\circ)$

5.4 $J(6,0^\circ), K(4,\pi), L(5,2\pi)$

5.5 $M\left(-3,\frac{\pi}{2}\right), N\left(7,\frac{\pi}{3}\right), O(0,0^\circ)$

5.6 $P\left(2,\frac{\pi}{6}\right), Q\left(-4,\frac{\pi}{4}\right), R\left(4,-\frac{\pi}{4}\right)$

5.7 $S\left(-5,\frac{2\pi}{3}\right), T\left(2,-\frac{11\pi}{6}\right), U\left(-4,-\frac{5\pi}{3}\right)$

5.8 $X\left(-1,\frac{8\pi}{3}\right), Y\left(-2,\frac{29\pi}{6}\right), Z\left(8,-\frac{21\pi}{4}\right)$

จงหาพิกัดจุดเชิงขั้วอีก 2 พิกัดซึ่งแทนจุดเดียวกันต่อไปนี้ (ข้อ 5.9 - 5.16)

5.10 $(4,20^\circ)$ 5.11 $(3,-15^\circ)$ 5.12 $(-1,69^\circ)$

5.13 $(-4,-360^\circ)$ 5.14 $\left(-3,-\frac{3\pi}{4}\right)$ 5.15 $\left(2,-\frac{4\pi}{3}\right)$

5.16 $\left(6,\frac{33\pi}{2}\right)$

จงหาพิกัดของจุดในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้ (ข้อ 5.17 - 5.25)

5.17 $\left(-3,\frac{3\pi}{2}\right)$ 5.18 $\left(4,\frac{5\pi}{6}\right)$ 5.19 $(6,\pi)$

5.20 $\left(4,\frac{3\pi}{4}\right)$ 5.21 $(0,\pi)$ 5.22 $\left(-2,-\frac{\pi}{3}\right)$

5.23 $\left(3\sqrt{3},-\frac{\pi}{4}\right)$ 5.24 $\left(3,\frac{\pi}{6}\right)$ 5.25 $\left(5,\frac{5\pi}{4}\right)$

จงหาพิกัดของจุดในระบบพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้ (ข้อ 5.26 - 5.40)

5.26 $(0,0)$ 5.27 $(0,3)$ 5.28 $(0,-4)$

5.29 $(2\sqrt{3},-2)$ 5.30 $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ 5.31 $(\sqrt{3},-1)$

5.32 $(-4,3)$ 5.33 $(-5,-12)$ 5.34 $(4,0)$

5.35 $(-3,0)$ 5.36 $(\sqrt{3},\sqrt{3})$ 5.37 $(-4\sqrt{3},4)$

5.38 $(-4,-4)$ 5.39 $(5,12)$ 5.40 $\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

จงแปลงสมการในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้ให้อยู่รูปสมการระบบพิกัดเชิงขั้ว (ข้อ 5.41 - 5.52)

5.41 $y=3$ 5.42 $2x-y=0$

5.43 $x^2=4y$ 5.44 $x=-3$

5.45 $x^2-y^2=4^2$ 5.46 $x^2+y^2=2y$

5.47 $y^2=9x$ 5.48 $2x+y=3$

5.49 $x^2-2y^2=4$ 5.50 $x^2=9y$

5.51 $x^2+y^2=2x$ 5.52 $x^2+y^2=9$

จงแปลงสมการในระบบพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้ให้อยู่รูปสมการระบบพิกัดฉาก (ข้อ 5.53 - 5.66)

5.53 $r\cos\theta=4$ 5.54 $r=5\cos\theta$

5.55 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 5.56 $r^2\sin 2\theta=4$

5.57 $r=\frac{2}{1-\cos\theta}$ 5.58 $\theta=\frac{2\pi}{3}$

5.59 $r=\frac{3}{1-\cos\theta}$ 5.60 $r=2$

5.61 $r\sin\theta=5$ 5.62 $r=\frac{4}{\sin\theta-2\cos\theta}$

5.63 $r=\frac{1}{\cos\theta+3\sin\theta}$ 5.64 $r=8\sin\theta$

5.65 $r=\frac{3}{3\sin\theta+4\cos\theta}$ 5.66 $r^2=\frac{4}{\cos 2\theta}$

จงพิจารณาเส้นโค้งต่อไปนี้ว่าสมมาตรกับแกนเชิงขั้ว แกนที่ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว และจุดขั้ว หรือไม่ (ข้อ 5.67 - 5.74)

5.67 $r^2 = \dfrac{4}{\cos 2\theta}$

5.68 $r^2 \sin 2\theta = 4$

5.69 $r = \dfrac{2}{1-\cos\theta}$

5.70 $r\cos\theta = 4$

5.71 $r = \dfrac{3}{1-\cos\theta}$

5.72 $r = 2$

5.73 $r\sin\theta = 5$

5.74 $r = \dfrac{4}{\sin\theta - 2\cos\theta}$

จงพิจารณาจุดตัดแกนเชิงขั้ว และจุดตัดแกนตั้งฉากกับแกนเชิงขั้วเส้นโค้งต่อไปนี้ (ข้อ 5.75 - 5.82)

5.75 $r = 6\sin\theta$

5.76 $r = \dfrac{1}{2\cos\theta + \sin\theta}$

5.77 $r = \dfrac{3}{\sin\theta - 2\cos\theta}$

5.78 $r\cos\theta = 2$

5.79 $r = \dfrac{2}{3-\cos\theta}$

5.80 $r\sin\theta = 1$

5.81 $r = 9$

5.82 $r = \dfrac{3}{2-5\cos\theta}$

จงพิจารณาขอบเขตของเส้นโค้งต่อไปนี้ (ข้อ 5.83 - 5.92)

5.83 $r^2 \sin 2\theta = 6$

5.84 $r^2 = \dfrac{2}{\cos 2\theta}$

5.85 $r = 2\sin\theta$

5.86 $r = \dfrac{2}{\cos\theta + 4\sin\theta}$

5.87 $r = \dfrac{6}{5\sin\theta - 2\cos\theta}$

5.88 $r\cos\theta = -3$

5.89 $r^2 \sin\theta = 1$

5.90 $r^2 = \dfrac{3}{\cos 2\theta}$

5.91 $r = 1$

5.92 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

จงวาดกราฟของสมการ $r = 3 + 6\sin\theta$

จงวาดกราฟเส้นโค้งที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ข้อ 6.1 - 6.6)

6.1 $\theta = \pi$

6.2 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

6.3 $r = 4(1+\sin\theta)$

6.4 $r = 16$

6.5 $r^2 = 9\cos 2\theta$

6.6 $r = 4\cos 2\theta$

จงหาสมการเชิงขั้วของวงกลมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ข้อ 6.7 - 6.12)

6.7 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(6, 0^\circ)$ รัศมียาว 4 หน่วย

6.8 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-4, \pi)$ รัศมียาว 5 หน่วย

6.9 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $\left(-3, -\dfrac{\pi}{2}\right)$ รัศมียาว 3 หน่วย

6.10 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $\left(2, \dfrac{7\pi}{4}\right)$ รัศมียาว 7 หน่วย

6.11 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $\left(8, 180^\circ\right)$ รัศมียาว 0.5 หน่วย

6.12 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $\left(-1, \dfrac{11\pi}{6}\right)$ รัศมียาว 6 หน่วย

จงหาสมการเส้นตรงในระบบพิกัดเชิงขั้วที่กำหนดเงื่อนไขต่อไปนี้ (ข้อ 6.13 - 6.18)

6.13 เส้นตรงแนวราบผ่านจุด $\left(-3, \dfrac{3\pi}{4}\right)$

6.14 เส้นตรงแนวตั้งผ่านจุด $\left(3, \pi\right)$

6.15 เส้นตรงที่สัมผัสกับวงกลม $r = 3$ ที่จุด $\left(3, \dfrac{\pi}{3}\right)$

6.16 เส้นตรงแนวตั้งผ่านจุด $\left(4, \dfrac{5\pi}{6}\right)$

6.17 เส้นตรงแนวราบผ่านจุด $\left(3, \dfrac{\pi}{2}\right)$

6.18 เส้นตรงที่สัมผัสกับวงกลม $r = 4$ ที่จุด $\left(5, \dfrac{5\pi}{4}\right)$

จงหาอธิบายชนิดของเส้นโค้งภาคตัดกรวยต่อไปนี้โดยพิจารณาจากค่า k และค่า e (ข้อ 6.19 - 6.24)

6.19 $r = \dfrac{3}{2+\cos\theta}$

6.20 $r = \dfrac{12}{2+3\cos\theta}$

6.21 $r = \dfrac{5}{1-\sin\theta}$

6.22 $r = \dfrac{25}{3-4\sin\theta}$

6.23 $r = \dfrac{7}{1+\cos\theta}$

6.24 $r = \dfrac{12}{3+2\sin\theta}$

จงแสดงสมการต่อไปนี้ในรูปสมการอิงตัวแปรเสริมโดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร x และ y และตัวแปรเสริม (ข้อ 6.25 - 6.28)

6.25 $x^2 = 25y+5, y = t^2-3$

6.26 $2x - xy = 1, y = t-2$

6.27 $xy = x-y-1, x = t+2$

6.28 $9x^2 - y^2 = t, y = t\tan\theta$

จงหาจุดตัดของเส้นโค้งสองเส้นในระบบพิกัดเชิงขั้วที่กำหนดให้ต่อไปนี้ พร้อมวาดกราฟ (ข้อ 6.29 - 6.47)

6.29 $r = \cos 2\theta$, $r = 1$

6.30 $r + 6\sin\theta = 0$, $r + 6\cos\theta = 0$

6.31 $r = \sin\theta$, $r = 1-\cos\theta$

6.32 $r^2 = 4\sin 2\theta$, $r = 2$

6.33 $r = 1-\sin\theta$, $r = \cos 2\theta$

6.34 $r = 4\cos\theta$, $r = 4\sin 2\theta$

6.35 $r = \sin\theta$, $r^2 = \sin 2\theta$

6.36 $r = 3\cos\theta$, $r = -4\sin\theta$

6.37 $r = 2\cos\theta$, $r^2 = 4\cos\theta$

6.38 $r = \sin\theta$, $r = 1+\sin\theta$

6.39 $r = 1$, $r = 2\sin 2\theta$

6.40 $r = \sqrt{2}\cos 2\theta$, $r = \sqrt{2}\sin 2\theta$

6.41 $r = 2\sin\theta + 1$
$r\sin\theta = 1$

6.42 $r(1-\cos\theta) = 4$
$r = 2\cos\theta$

6.43 $r = \sec\theta$
$r = 2\cos\theta$

6.44 $r = 3(1-\cos\theta)$
$\theta = \dfrac{\theta}{2}$

6.45 $r = 3\sin\theta$
$\theta = \dfrac{\pi}{3}$

6.46 $r = 4$
$\theta = \dfrac{\theta}{4}$

6.47 $r = 3 - 2\cos\theta$
$\theta = 0$

จงวาดกราฟของสมการอิงตัวแปรเสริมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ โดยมี t เป็นตัวแปรเสริม (ข้อ 6.48 - 6.64)

6.48 $x = 4\cos t, y = 2\sin t$

6.49 $x = 3t, y = 9t^2$

6.50 $x = t, y = \sqrt{t}$

6.51 $x = \sec^2 t - 1, y = \tan t$

6.52 $x = 3t, y = 9t^2$

6.53 $x = \cos^2 t + 3, y = 4\sin t - 4$

6.54 $x = \csc t, y = \cot t$

6.55 $x = 2t - 5, y = 4t - 7$

6.56 $x = 2\sinh t, y = 2\cosh t$

6.57 $x = e^t, y = e^{t+1}$

6.58 $x = 4 - 3t, y = 1 + t$

6.59 $x = 3 - t, y = t^2 - 2$

6.60 $x = \cos 2t, y = \sin 2t$

6.61 $x = \sin 2\pi t, y = \cos 2\pi t$

6.62 $x = e^t, y = e^{t+1}$

6.63 $x = t^3, y = 2\ln t$

6.64 $x = 4\tan 2t, y = 3\sec 2t$