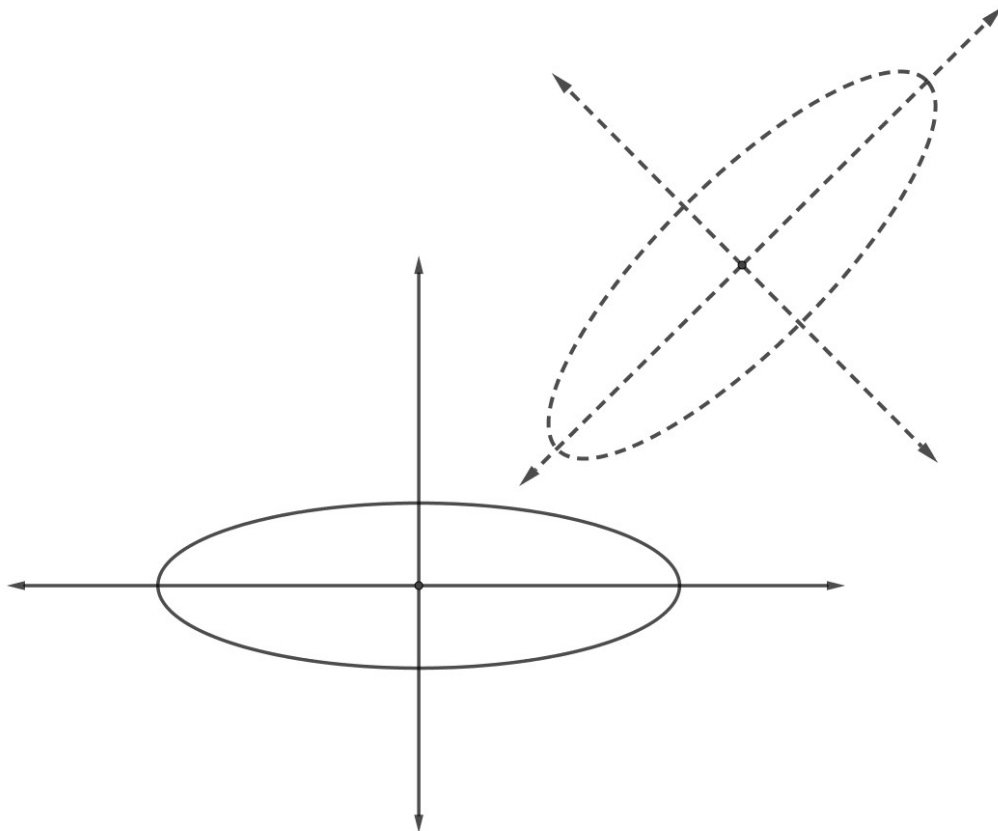


บทที่ 4

การปรับสมการให้เป็นรูปอย่างง่าย (Simplification of Equation)

การจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปสมการมาตรฐานของภาคตัดกรวยในบทที่ 3 เราจะสังเกตเห็นว่ารูปเรขาคณิตแต่ละรูปนั้นมีสมมาตรกับแกน X และแกน Y หรือมีสมมาตรกับเส้นตรงที่ขนานกับแกน X และแกน Y เท่านั้น แต่ถ้ารูปเรขาคณิตดังกล่าวไม่ได้มีสมมาตรกับเส้นตรงที่ขนานกับแกน X และแกน Y แล้วจะมีพจน์ที่มีตัวแปร x กับตัวแปร y คูณกันอยู่ในสมการนั้น ซึ่งเป็นเรื่องยากที่เราจะจัดสมการให้อยู่ในรูปมาตรฐานของภาคตัดกรวย ซึ่งในบทที่ 4 จะแสดงถึงวิธีที่ทำให้การจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปอย่างง่าย และนำไปสู่การวาดกราฟได้ง่ายขึ้น และวิธีดังกล่าวก็คือการเลื่อนแกน และการหมุนแกน

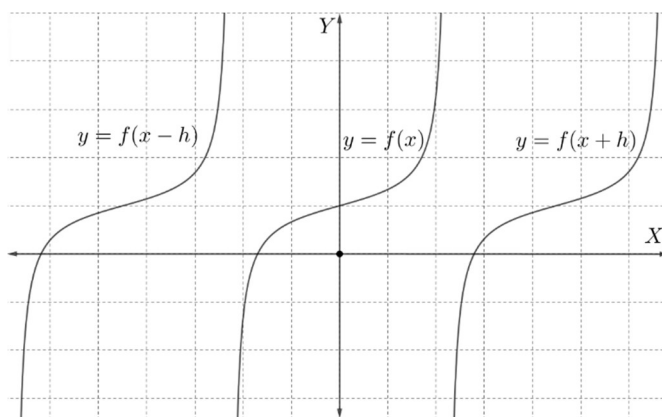
การย้ายแกนเป็นการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งจุดเริ่มต้นไปอยู่ ณ ตำแหน่งใหม่ที่จุดใดจุดหนึ่งเพื่อที่จะทำให้สมการของกราฟอยู่ในรูปที่ง่ายขึ้น ซึ่งโดยปกติจะเป็นการย้ายจุดเริ่มต้นไปยังจุดศูนย์กลางของกราฟนั่นเอง ดังนั้นกราฟของสมการจะอยู่ในรูปที่ไม่มีเทอมกำลังหนึ่งของตัวแปร การหมุนแกนเป็นการเปลี่ยนแปลงระบบพิกัดโดยหมุนแกน X และแกน Y ไปเป็นมุม θ ขณะที่จุดเริ่มต้นคือจุด $(0,0)$ ทั้งนี้เพื่อจะกำจัดเทอม xy ของสมการนั่นเอง



รูปที่ 4.1 แสดงการหมุนและเลื่อนแกน

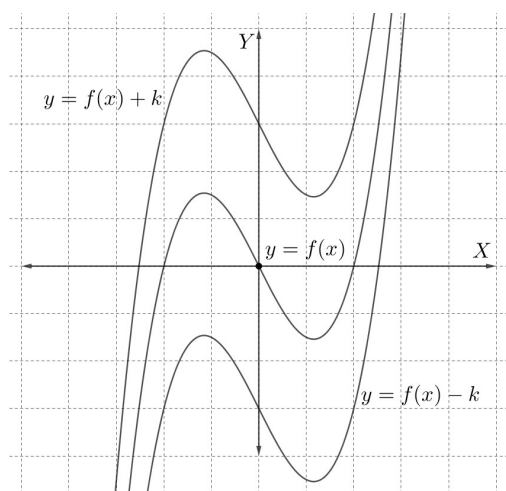
4.1 การเลื่อนแกน (Translation of Axes)

ในการเลื่อนแกนนั้นจะเกี่ยวข้องกับการแปลง (Transformation) อยู่สองลักษณะ คือ การเลื่อนตามแนวนอน (Horizontal Shift) และการเลื่อนตามแนวตั้ง (Vertical Shift) เช่น สมการ $y = f(x + h)$ จะมีลักษณะกราฟสมภาค (Congruence) กับสมการ $y = f(x)$ โดยถ้า $h > 0$ เลื่อนกราฟไปทางขวา $|h|$ หน่วย ถ้า $h < 0$ เลื่อนไปทางซ้าย $|h|$ หน่วย ดังรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 แสดงการเลื่อนตามแนวนอน

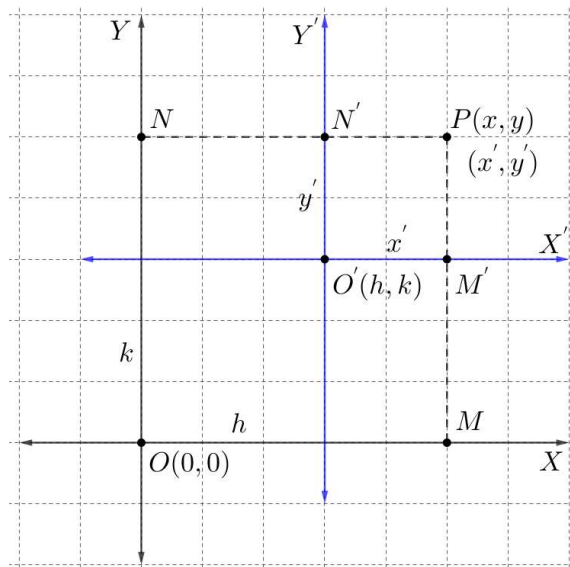
ในทำนองเดียวกัน กราฟ $y - k = f(x)$ หรือ $y = f(x) + k$ จะมีลักษณะของกราฟสมภาค กับ $y = f(x)$ โดยถ้า $k > 0$ เลื่อนกราฟขึ้นไปข้างบน $|k|$ หน่วย ถ้า $k < 0$ เลื่อนกราฟลงข้างล่าง $|k|$ หน่วย ดังรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 แสดงการเลื่อนตามแนวตั้ง

สำหรับกราฟที่มีรูปสมการเป็น $f(x - h, y - k) = c$ กราฟจะสมภาคกับ $f(x, y) = c$ โดยต้องเลื่อนตามแนวแกนออกไป h หน่วย และเลื่อนตามแนวแกนตั้งไป k หน่วย

สมมติให้แกน OX และ OY เป็นแกนชุดเดิม และให้แกน $O'X'$ และ $O'Y'$ เป็นแกนชุดใหม่ ซึ่งมีจุด
พิกัดของ O' คือจุด (h, k) เมื่อเทียบกับแกนชุดเก่า ดังรูปที่ 4.4



รูปที่ 4.4 แกนชุดเก่าเทียบกับแกนชุดใหม่

This image shows a full page of white paper with ten horizontal dashed lines, typical of primary school handwriting practice paper. The lines are evenly spaced and extend across the entire width of the page. There is no text or other markings on the paper.

[illegible][illegible]

ตัวอย่าง 4.1.3 จงเขียนแกนของสมการ $x^2 - 6x - 6y + 15 = 0$ ให้อยู่ในรูปสมการมาตรฐานของ ภาคตัดกรวย

[illegible]

ตัวอย่าง 4.1.4 จงเลื่อนแกนของสมการ $25x^2 - 16y^2 + 150x + 32y - 191 = 0$ ให้อยู่ในรูปสมการมาตรฐานของภาคตัดกรวย

[illegible]

This image shows a full page of white paper with ten horizontal dashed lines, typical of primary school handwriting practice paper. The lines are evenly spaced and extend across the entire width of the page. There is no text or other markings on the paper.

[illegible]

4.2 การหมุนแกน (Rotation of Axes)

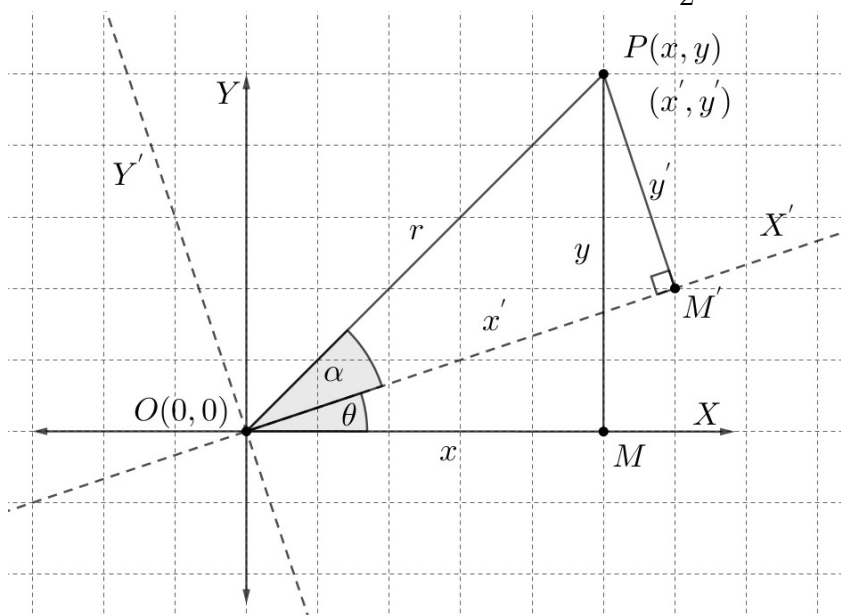
บทนิยาม 4.2.1 การหมุนแกน คือ การแปลงระบบแกนพิกัด ซึ่งจุดกำเนิด (Origin) อยู่ตำแหน่งเดิม และหมุนแกนไปเป็นมุมคงที่มุมหนึ่งรอบจุดคงที่

เราทราบว่า ภาคตัดกรวยใด ๆ ที่มีแกนขนานกับแกนพิกัด สามารถแทนในรูปสมการระดับชั้นสอง

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

สำหรับสมการระดับชั้นสองใด ๆ $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ โดยที่ $B \neq 0$ ยังแทนภาคตัดกรวย หรือ ภาคตัดกรวยลดรูป (Degenerate Conic) ที่มีแกนขนานกับแกนพิกัดได้ ในการศึกษาการวาดกราฟของสมการระดับชั้นที่สองใด ๆ โดยที่ $B \neq 0$ เราสามารถกำจัดเทอม Bxy ออกไปจากสมการได้โดยใช้วิธีการหมุนแกน สมมติสมการระดับชั้นที่สองใด ๆ ที่ $B \neq 0$ คือ

สมมติว่าหมุนแกน OX และแกน OY ไปเป็นมุม θ โดย $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ดังรูปที่ 4.12



รูปที่ 4.12 แสดงหมุนแกน OX และแกน OY ไปเป็นมุม θ โดย $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

.....

.....

.....

.....

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

ตัวอย่าง 4.2.1 จงหาสมการใหม่ของสมการ $x^2 + xy + y^2 = 8$ หลังจากการหมุนแกนเป็นมุม 45°

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

ตัวอย่าง 4.2.2 จงหามุม θ ของการหมุนแกนของสมการ $x^2 + y^2 + 2xy - x + y = 0$ ให้ไม่มีเทอม $x'y'$ พร้อมวาดกราฟ

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

[illegible]

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

ตัวอย่าง 4.2.6 จงหุนแกนของสมการ $12xy - 5y^2 + 48y - 36 = 0$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

[illegible]

ในการวาดกราฟของสมการระดับชั้นที่สอง เราอาจหมุนแกนก่อนเพื่อกำจัดเทอม xy แล้วย้ายแกนต่อเพื่อกำจัดเทอม x และเทอม y หรือเราจะย้ายแกนก่อนเพื่อกำจัดเทอม x และเทอม y แต่เทอม xy ยังอยู่ แล้วหมุนแกนต่อเพื่อกำจัดเทอมเทอม xy

ตัวอย่าง 4.3.1 จงหามุมของการหมุนแกนซึ่งเปลี่ยนสมการ $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 2x + 2\sqrt{3}y = 4$ ให้ไม่มีเทอม $x'y'$ และเลื่อนแกนให้อยู่ในรูปมาตรฐานของภาคตัดกรวย

[illegible]

$$73x^2 - 72xy + 52y^2 + 100x - 200y + 100 = 0$$
[illegible]

4.4 การจำแนกประเภทของภาคตัดกรวย (Identification of A Conic)

ทฤษฎีบท 4.4.1 ถ้าสมการ $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ เป็นสมการที่มีกราฟเป็นภาคตัดกรวยแบบใดแบบหนึ่งเราจะได้ว่า

- ถ้า $B^2 - 4AC < 0$ แล้ว กราฟจะเป็นรูปวงรี
- ถ้า $B^2 - 4AC = 0$ แล้ว กราฟจะเป็นรูปพาราโบลา
- ถ้า $B^2 - 4AC > 0$ แล้ว กราฟจะเป็นรูปไฮเพอร์โบลา

ในกรณีที่สมการระดับขั้นที่สอง (Second Degree) สามารถแยกตัวประกอบให้อยู่ในรูปของสมการระดับขั้นที่หนึ่ง (First Degree) จะเป็นกราฟของเส้นตรง

ตัวอย่าง 4.4.1 กำหนดให้สมการ $x^2 + xy + y^2 = 8$ มีกราฟเป็นภาคตัดกรวยแบบใด

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 4.4.2 กำหนดให้สมการ $x^2 + y^2 + 2xy - x + y = 0$ มีกราฟเป็นภาคตัดกรวยแบบใด

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 4.4.3 กำหนดให้สมการ $3x^2 - y^2 + 4\sqrt{3}xy = 15$ มีกราฟเป็นภาคตัดกรวยแบบใด

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 4.4.4 กำหนดให้สมการ $x^2 + \sqrt{3}xy + 2y^2 - 16 = 0$ มีกราฟเป็นภาคตัดกรวยแบบใด

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 4.4.5 กำหนดให้สมการ $4x^2 + 4xy + y^2 = 0$ มีกราฟเป็นภาคตัดกรวยแบบใด

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 4.4.6 กำหนดให้สมการ $12xy - 5y^2 + 48y = 36$ มีกราฟเป็นภาคตัดกรวยแบบใด

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 4.4.7 ให้สมการ $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 2x + 2\sqrt{3}y = 4$ มีกราฟเป็นภาคตัดกรวยแบบใด

.....

.....

.....

.....

.....

.....

สรุปท้ายบทที่ 4

สำหรับในบทที่ 4 นั้นเราได้ศึกษาการปรับสมการให้เป็นรูปอย่างง่าย ซึ่งมีวิธี 2 แบบ คือ การปรับโดยการเลื่อนแกนและการปรับโดยการหมุนแกน

การปรับสมการให้เป็นรูปอย่างง่ายโดยการเลื่อนแกนนั้น ก็คือการปรับให้สมการมีจุดยอดหรือจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดของแกนพิกัดใหม่ $X'Y'$ เราสามารถปรับได้โดยการสร้างแกน $X'Y'$ ขึ้นมาใหม่ให้มีจุดกำเนิดที่จุดยอดหรือที่จุดศูนย์กลางของกราฟนั้น ๆ สมการใหม่จะปรับโดยการแทนค่าดังนี้

$$\text{ให้ } x = x' + h$$

$$\text{และ } y = y' + k$$

เมื่อกำหนดให้จุดยอดหรือจุดศูนย์กลาง คือจุด (h, k)

สำหรับการปรับสมการให้เป็นรูปอย่างง่ายโดยการหมุนแกนนั้น คือการกำจัดเทอม xy ในสมการนั้นออกไป โดยการหมุนแกนในมุมที่ไม่มีเทอม xy โดยเราสามารถหามุมดังกล่าวได้จากสูตรหมุนแกนดังนี้

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} \quad \text{โดยค่า } A, B \text{ และ } C \text{ หาได้จากสมการระดับชั้นที่สอง}$$

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{เมื่อ } B \neq 0$$

เมื่อได้มุมที่ต้องการก็จะปรับสมการใหม่โดยใช้สูตรหมุนแกนดังนี้

$$\text{ให้ } x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$\text{และ } y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

ในการวาดกราฟของสมการระดับชั้นที่สอง เราอาจหมุนแกนก่อนเพื่อกำจัดเทอม xy แล้วย้ายแกนต่อเพื่อกำจัดเทอม x และเทอม y หรือเราจะย้ายแกนก่อนเพื่อกำจัดเทอม x และเทอม y แต่เทอม xy ยังอยู่ แล้วหมุนแกนต่อเพื่อกำจัดเทอม xy

ถ้าสมการ $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ เป็นสมการที่มีกราฟเป็นภาคตัดกรวยแบบใดแบบหนึ่งเราจะได้ว่า

- ถ้า $B^2 - 4AC < 0$ แล้ว กราฟจะเป็นรูปวงรี
- ถ้า $B^2 - 4AC = 0$ แล้ว กราฟจะเป็นรูปพาราโบลา
- ถ้า $B^2 - 4AC > 0$ แล้ว กราฟจะเป็นรูปไฮเพอร์โบลา

ในกรณีที่สมการระดับชั้นที่สอง (Second Degree) สามารถแยกตัวประกอบให้อยู่ในรูปของสมการระดับชั้นที่หนึ่ง (First Degree) จะเป็นกราฟของเส้นตรงสองเส้นขนานกัน

แบบฝึกหัดบทที่ 4

จงหาสมการใหม่เมื่อย้ายจากจุดกำเนิดไปยังจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ข้อ 4.1-4.7)

4.1 $2x + y + 5 = 0$ เมื่อจุดใหม่คือ $(2, 8)$

4.2 $2x^2 + 8x - y + 5 = 0$ เมื่อจุดใหม่คือ $(-2, 4)$

4.3 $9x^2 + y^2 + 3x + 8y + 43 = 0$ เมื่อจุดใหม่คือ $(5, -1)$

4.4 $14x^2 - 4y^2 - 160x + 24y + 300 = 0$ เมื่อจุดใหม่คือ $(-3, -5)$

4.5 $3xy - 21x - 6y - 47 = 0$ เมื่อจุดใหม่คือ $(2, 7)$

4.6 $x^2 + y^2 = 9$ เมื่อจุดใหม่คือ $(-3, 2)$

4.7 จงอธิบายว่ากราฟ $y + 4(x - 1)^2 = 0$ มาจากการย้ายแกนของกราฟ $y = x^2$

จงหาจุดกำเนิดใหม่เมื่อย้ายแกนของสมการแล้วจะไม่มีเทอมดีกรีหนึ่ง (ข้อ 4.8-4.12)

4.8 $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4$

4.9 $x^2 + 2y^2 + 6x - 4y + 2 = 0$

4.10 $2y^2 - 3x^2 - 12x - 16y + 14 = 0$

4.11 $2x^2 - 3xy - y^2 + x - 5y - 3 = 0$

4.12 $x^2 + y^2 - 12x = 0$

จงหาสมการใหม่เมื่อหมุนแกนด้วยมุม θ (ข้อ 4.13-4.20)

4.13 $\sqrt{3}x - y = 4$ เมื่อ $\theta = 60^\circ$

4.14 $xy = 1$ เมื่อ $\theta = 45^\circ$

4.15 $x^2 + xy + y^2 = 5$ เมื่อ $\theta = 45^\circ$

4.16 $2x^2 + xy + 2y^2 = 2$ เมื่อ $\theta = 45^\circ$

4.17 $6x^2 - 2\sqrt{3}xy + 8y^2 = 5$ เมื่อ $\theta = 30^\circ$

4.18 $x^2 + \sqrt{3}xy + 2y^2 = 2$ เมื่อ $\theta = 60^\circ$

4.19 $xy = 4$ เมื่อ $\theta = 45^\circ$

4.20 $x^2 - 4xy + 4y^2 - 8\sqrt{5}x = 0$ เมื่อ $\theta = \arctan \frac{1}{2}$

จงหาสมการ ในการหมุนแกนโดยแปลงสมการนั้นให้ไม่มีเทอม $x'y'$ พร้อมวาดกราฟ (ข้อ 4.21-4.32)

$$4.21 \quad 6x^2 + 4xy + 3y^2 = 2$$

$$4.22 \quad 8x^2 - 8xy - 7y^2 = 3$$

$$4.23 \quad 15x^2 + 7xy - 9y^2 = 1$$

$$4.24 \quad 9x^2 + 20xy - 12y^2 = 1$$

$$4.25 \quad 9x^2 - 21xy - 11y^2 = 2$$

$$4.26 \quad 3xy + y - 2 = 0$$

$$4.27 \quad x^2 - 3xy + 4y^2 + 7 = 0$$

$$4.28 \quad x^2 - 2xy + y^2 - 8\sqrt{2}x - 8 = 0$$

$$4.29 \quad xy + x + y = 0$$

$$4.30 \quad 3x^2 - 10xy + 3y^2 + 22x - 26y + 43 = 0$$

$$4.31 \quad 73x^2 - 72xy + 52y^2 + 380x - 160y + 400 = 0$$

$$4.32 \quad 104x^2 + 60xy + 41y^2 - 60x - 82y - 75 = 0$$

จงบอกว่า สมการที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นกราฟชนิดใดของภาคตัดกรวย (ข้อ 4.33-4.36)

$$4.33 \quad 2x^2 - 4xy + 8y^2 + 7 = 0$$

$$4.34 \quad 2xy - x + y + 1 = 0$$

$$4.35 \quad x^2 - y^2 + 4 = 0$$

$$4.36 \quad 3x^2 + 6xy + 5y^2 - x + y = 0$$

จงปรับสมการที่กำหนดให้ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย (ข้อ 4.37-4.43)

$$4.37 \quad 7x^2 - 3xy + 3y^2 = 1$$

$$4.38 \quad 15x^2 + 7xy - 9y^2 = 1$$

$$4.39 \quad 12xy - 5y^2 + 48x - 36 = 0$$

$$4.40 \quad 9x^2 - 21xy - 11y^2 = 2$$

$$4.41 \quad x^2 + 3xy + y^2 + x - y - 1 = 0$$

$$4.42 \quad x^2 - 2xy + y^2 - 8x + 16y = 0$$

$$4.43 \quad 5x^2 + 2xy + 5y^2 - 12x - 12y = 0$$

จงหาว่าต้องย้ายจุดเริ่มต้นไปที่ไหนจะทำให้เทอม x และ y ของสมการหมดไป (ข้อ 4.44-4.46)

$$4.44 \quad y^2 - 4y - 8x - 20 = 0$$

$$4.45 \quad 9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y + 4 = 0$$

$$4.46 \quad 4y^2 - x^2 - 24y - 8x + 16 = 0$$

จงพิจารณาการหมุนแกนเพื่อให้ไม่มีเทอม xy พร้อมวาดกราฟของสมการต่อไปนี้ (ข้อ 4.47-4.52)

$$4.47 \quad 8x^2 + 5xy - 4y^2 + 2 = 0$$

$$4.48 \quad 2x^2 + 9xy + 14y^2 + 5 = 0$$

$$4.49 \quad x^2 + 12xy + 6y^2 - 2x + 5y + 1 = 0$$

$$4.50 \quad x^2 + 14xy + 49y^2 + \sqrt{2}y + 1 = 0$$

$$4.51 \quad 27x^2 + 5xy + 15y^2 - 2 = 0$$

$$4.52 \quad x^2 + 14xy + 49y^2 + \sqrt{2}y + 1 = 0$$

$$4.53 \quad 4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$$

$$4.54 \quad 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$$

จงหาสมการของเส้นตรง $x - y + 2\sqrt{2} = 0$ เมื่อหมุนแกนไปเป็นมุม 30°

จงหาสมการของวงกลม $x^2 + y^2 = 36$ เมื่อหมุนแกนไปเป็นมุม 60°

จงหาสมการของ $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 120x - 90y = 0$ เมื่อหมุนแกนไปเป็นมุม $\tan \theta = \frac{3}{4}$

Note บทที่ 4