บทที่ 2
สมการเส้นตรง (Line Equation)

การศึกษาเกี่ยวกับสมการเส้นตรงในวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ เป็นการศึกษาถึงวิธีการกำหนดสมการให้สอดคล้องกับกราฟของเส้นตรงที่กำหนดให้ หรือเขียนกราฟของเส้นตรงตามสมการที่กำหนดให้ได้ สมการที่เขียนแทนกราฟของเส้นตรงเรียกว่าสมการเส้นตรงซึ่งมีลักษณะแตกต่างกันออกไปตามเงื่อนไขของเส้นตรงแต่ละเส้น ในบทที่ 1 เราได้ทราบความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับระบบพิกัดฉากกันมาแล้ว ส่วนในบทนี้เราจะหาสมการเส้นตรง จากความชันและจุดที่อยู่บนเส้นตรงนั้น 1 จุด หรือ หาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดสองจุดที่อยู่บนเส้นตรงนั้น เป็นต้น สมการของเส้นตรง จะประกอบด้วยเทอม x และเทอม y และจุด (x,y) ที่อยู่บนเส้นตรงจะต้องสอดคล้องกับสมการของเส้นตรงนั้นด้วย ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.1 สมการของเส้นตรง (Equation of a Straight Line)

ทฤษฎีบท 2.1.1 สมการของเส้นตรง l ที่มีความชัน m และผ่านจุด $P_1(x_1,y_1)$ คือ $y-y_1=m(x-x_1)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 2.1.1 จงหาสมการเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ $\frac{3}{2}$ และผ่านจุด $(2,1)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 2.1.2 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1,4)$ และมีความชันเท่ากับ $-\frac{1}{2}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ทฤษฎีบท 2.1.2 สมการของเส้นตรง l ที่มีความชัน m และส่วนตัดแกน Y เท่ากับ b คือ $y = mx + b$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 2.1.3 จงหาสมการเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ $-\dfrac{5}{2}$ และตัดแกน Y ที่จุด $(0,3)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 2.1.4 จากสมการเส้นตรง $9x - 3y - 6 = 0$ จงหาความชัน และจุดตัดแกน Y

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ทฤษฎีบท 2.1.3 สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ คือ $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 2.1.5 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(2,1)$ และ $P_2(-3,-1)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 2.1.6 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $Q_1(-3,2)$ และ $Q_2(4,-1)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ทฤษฎีบท 2.1.4 สมการเส้นตรงที่มีส่วนตัดแกน X และส่วนตัดแกน Y เป็น a และ b ตามลำดับ โดยที่ $a,b \neq 0$ คือ $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

ตัวอย่าง 2.1.7 จงหาสมการเส้นตรงที่ตัดแกน X ที่จุด $(-2,0)$ และตัดแกน Y ที่จุด $(0,3)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 2.1.8 จงหาสมการเส้นตรงที่ตัดแกน Y ที่จุด $(0,-1)$ และตัดแกน X ที่จุด $(-5,0)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

บทนิยาม 2.1.1 เราแทนเส้นตรงทุกเส้นด้วยสมการเชิงเส้นของตัวแปร x และ y คือ $Ax + By + C = 0$ เมื่อ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน เรียกสมการนี้ว่า *สมการทั่วไปของเส้นตรง*

ข้อสังเกต

1. ถ้า $C = 0$ แล้วเส้นตรงจะผ่านจุดกำเนิด $(0,0)$
2. ถ้า $B = 0$ แล้วเส้นตรงมีสมการ $x = -\dfrac{C}{A}$ และขนานกับแกน Y
3. ถ้า $B \neq 0$ แล้วเส้นตรงมีความชัน $m = -\dfrac{A}{B}$ และตัดแกน Y ที่ $b = -\dfrac{C}{B}$
4. ถ้า $A = 0$ แล้วเส้นตรงมีสมการ $y = -\dfrac{C}{B}$ และขนานกับแกน X

ตัวอย่าง 2.1.9 จากสมการเส้นตรง $2x + 3y + k = 0$ ผ่านจุด $(-1,2)$ จงหาค่า k

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 2.1.10 จงหาสมการเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $l : x + 3y - 8 = 0$ และผ่านจุด $(2,3)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 2.1.11 จงหาสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $l_1 : x + 3y - 8 = 0$ และผ่านจุด $(1,2)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 2.1.12 กำหนดให้จุด $P(0,2)$ และจุด $Q(3,4)$ จงหาจุด R ที่อยู่บนแกน X ที่ทำให้ $PR+RQ$ มีค่าน้อยที่สุด

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 2.1.13 กำหนดให้เส้นตรง $3x - 4y - 6 = 0$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $x + ay + 3 = 0$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง ถ้าเส้นตรงทั้งสองตัดกันที่จุด A และตัดแกน X ที่จุด B และจุด C ตามลำดับ แล้ว พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC มีค่าเท่าใด

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.2 ระยะทางจากจุดไปยังเส้นตรง (Distance from a Point to a Line)

ทฤษฎีบท 2.2.1 ระยะตั้งฉากจากจุด $P_1(x_1, y_1)$ ไปยังเส้นตรง $Ax + By + C = 0$ คือ

$$d = \frac{\left|Ax_1 + By_1 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 2.2.1 จงหาระยะทางจากจุด $(1,3)$ ไปยังเส้นตรง $l: -3x+4y+16=0$

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 2.2.2 จงหาระยะทางจากเส้นตรง $l: 3x+4y-5=0$ ไปยังจุด $(-7,-6)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 2.2.3 จงหาสมการเส้นตรงที่มีความชัน $\frac{3}{4}$ และอยู่ห่างจากจุด $(2,1)$ เป็นระยะทาง 2 หน่วย

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.3 ระยะทางระหว่างเส้นตรงคู่ขนาน (Distance Between Parallel Lines)

ทฤษฎีบท 2.3.1 ให้เส้นตรง $l_1 : Ax + By + C_1 = 0$ และ $l_2 : Ax + By + C_2 = 0$ เป็นสมการเส้นตรงที่ขนานกัน และ d แทนระยะทางระหว่างเส้นตรงทั้งสอง จะได้ $d = \dfrac{\left|C_1 - C_2\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 2.3.1 จงหาระยะทางระหว่างเส้นตรง $l_1 : 2x + y + 3 = 0$ และ $l_2 : 2x + y - 7 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 2.3.2 จงหาระยะทางระหว่างเส้นตรง $l_1 : x + 3y - 4 = 0$ และ $l_2 : 2x + 6y + 10 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

สรุปท้ายบทที่ 2

สำหรับในบทที่ 2 นั้นเราได้ศึกษาสมการเส้นตรง ระยะทางจากจุดไปยังเส้นตรง และระยะทางระหว่างเส้นตรงคู่ขนาน ซึ่งมีสูตรที่สำคัญดังนี้

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y = mx + b$$

สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด 2 จุด $\quad y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

ระยะทางจากจุดไปยังเส้นตรง $\quad d = \dfrac{\left|Ax_1 + By_1 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

ระยะทางระหว่างเส้นตรงคู่ขนาน $\quad d = \dfrac{\left|C_1 - C_2\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

แบบฝึกหัดบทที่ 2

จงวาดเส้นตรงให้สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้ พร้อมทั้งหาสมการของเส้นตรงแต่ละข้อ (ข้อ 2.1 - 2.7)

2.1 เส้นตรงที่อยู่เหนือแกน X เป็นระยะ 6 หน่วย

2.2 เส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน X และผ่านจุด $(2,7)$

2.3 เส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิดและมีความชันเท่ากับ $-\frac{7}{8}$

2.4 เส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1,5)$ และมีความชันเท่ากับ $\frac{5}{12}$

2.5 เส้นตรงแนวนอนและผ่านจุด $(4,4)$

2.6 เส้นตรงที่อยู่ทางด้านซ้ายของแกน Y เป็นระยะ 3 หน่วย

2.7 เส้นตรงที่อยู่ทางด้านล่างของแกน X และผ่านจุด $(9,-7)$

จงหาสมการเส้นตรงเมื่อทราบจุดที่ผ่าน A และมีความชัน m พร้อมทั้งวาดกราฟประกอบ (ข้อ 2.8-2.17)

2.8 $A(1,2), m=-2$

2.9 $A\left(0,-3\right), m=0$

2.10 $A\left(-4,6\right), m=1$

2.11 $A\left(4,0\right), m=-3$

2.12 $A\left(0,0\right), m=0$

2.13 $A\left(-\frac{3}{2},\frac{7}{6}\right), m=\frac{5}{3}$

2.14 $A\left(\frac{1}{5},-\frac{3}{8}\right), m=\frac{4}{5}$

2.15 $A\left(-2,\frac{24}{35}\right), m=7$

2.16 $A\left(-\frac{5}{3},-\frac{3}{5}\right), m=-12$

2.17 $A\left(0,0\right), m=\frac{11}{-3}$

จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด A และจุด B ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ พร้อมทั้งวาดกราฟ (ข้อ 2.18-2.22)

2.18 $A(1,2), B(3,4)$

2.19 $A(3,2), B(-4,5)$

2.20 $A(-5,4), B(-5,6)$

2.21 $A(0,0), B(3,1)$

2.22 $A(-5,\sqrt{5}), B(\sqrt{6},0)$

จงหาสมการเส้นตรงเมื่อทราบจุดตัดแกน $X(a)$ และจุดตัดแกน $Y(b)$ ดังข้อต่อไปนี้ พร้อมทั้งวาดกราฟ (ข้อ 2.23 - 2.27)

2.23 $a = 1, b = 2$

2.24 $a = -3, b = 5$

2.25 $a = -\frac{3}{5}, b = \frac{7}{3}$

2.26 $a = -\frac{1}{4}, b = \frac{1}{3}$

2.27 $a = -\sqrt{2}, b = 4$

จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด A และขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ข้อ 2.28 - 2.32)

2.28 $A(1,2), x + y - 10 = 0$

2.29 $A(-4,0), 5x + 2y - 1 = 0$

2.30 $A(-2,1), 2x + 8y + 2 = 0$

2.31 $A\left(-\frac{1}{2}, 5\right), 6x - 3y - 15 = 0$

2.32 $A\left(-\frac{4}{7}, \sqrt{3}\right), x + 8y = 0$

จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด A และตั้งฉากกับเส้นตรงที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ข้อ 2.33 - 2.37)

2.33 $A(1,2), x+y-10=0$

2.34 $A(-4,0), 5x+2y-1=0$

2.35 $A(-2,1), 2x+8y+2=0$

2.36 $A\left(-\frac{1}{2},5\right), 6x-3y-15=0$

2.37 $A\left(-\frac{4}{7},\sqrt{3}\right), x+8y=0$

จงหาจุดตัดของเส้นตรงสองเส้นที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ถ้ามี) (ข้อ 2.38 - 2.40)

2.38 $x+y=1, 2x-y=2$

2.39 $3x+y=7, 2x-y=0$

2.40 $\frac{1}{2}x-5y=7, \frac{3}{2}x+y=2$

จงหาระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรงที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ข้อ 2.41 - 2.44)

2.41 $x+y=1, (1,2)$

2.42 $3x-y-2=0, (2,3)$

2.43 $y=0, (-5,3)$

2.44 $x+2=0, (3,6)$

จงหาระยะทางระหว่างเส้นตรง 2 เส้นที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ข้อ 2.45 - 2.47)

2.45 $x+y+1=0, x+y+2=0$

2.46 $9x+10y=7, 18x+20y=32$

2.47 $12x+5y=15, 12x+5y=12$