

ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น

Basic of Number Theory

3.1 การหารลงตัว

บทนิยาม ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $b \neq 0$

a หาร b ลงตัว ก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม c ที่ทำให้ $a = bc$

เรียก b ว่าตัวหาร (divisor) ของ a

และเรียก a ว่าเป็นพหุคูณ (multiple) ของ b

ใช้สัญลักษณ์ $b|a$ แทน b หาร a ลงตัว และ

$b \nmid a$ แทน b หาร a ไม่ลงตัว

ตัวอย่างเช่น

1. $2|8$ เพราะ $8 = 2 \cdot 4$
2. $-3|15$ เพราะ $15 = (-3) \cdot (-5)$
3. $-4|-8$ เพราะ $-8 = (-4) \cdot (2)$
4. $5|0$ เพราะ $0 = 5 \cdot 0$
5. $4|-20$ เพราะ $-20 = 4 \cdot (-5)$
6. $5|15$ เพราะ $15 = 5 \cdot 3$
7. $6|24$ เพราะ $24 = 6 \cdot 4$
8. $4 \nmid 9$ เพราะไม่มีจำนวนเต็ม c ที่ทำให้ $9 = 4c$
9. $6 \nmid 20$ เพราะไม่มีจำนวนเต็ม c ที่ทำให้ $20 = 6c$

ข้อสังเกต

1. หารด้วย 2 ลงตัว เมื่อ หลักหน่วย ลงท้ายด้วย 2, 4, 6, 8

เช่น $2|326, 2|528, 2|694$

2. หารด้วย 3 ลงตัว เมื่อ นำเลขโดดทุกหลักมาบวกกันหมดแล้วหารด้วย 3 ลงตัว

เช่น $3|324$ เพราะ $3|(3+2+4)$

$3|291$ เพราะ $3|(2+9+1)$

3. หารด้วย 4 ลงตัวเมื่อ 2 หลักท้าย หารด้วย 4 ลงตัว

เช่น $4 \mid 521928$ เพราะ $4 \mid 28$

$4 \mid 715832$ เพราะ $4 \mid 32$

4. หารด้วย 5 ลงตัว เมื่อ หลักหน่วยลงท้ายด้วย 0, 5

เช่น $5 \mid 695$, $5 \mid 740$

5. หารด้วย 6 ลงตัว เมื่อ หารด้วย 2 และหารด้วย 3 ลงตัวทั้งคู่

เช่น $6 \mid 966$ เพราะ $2 \mid 966$ และ $3 \mid 966$

6. หารด้วย 7 ลงตัว เมื่อ เอาตัวเลขที่ตัดหลักหน่วยทิ้งแล้วลบด้วย สองเท่าของหลักหน่วย หารด้วย 7 ลงตัว

เช่น $7 \mid 48125$ เพราะ $4812 - (2 \times 5) = 4802$

เพราะ $480 - (2 \times 2) = 476$

เพราะ $47 - (2 \times 6) = 35$

$7 \mid 35$

7. หารด้วย 8 ลงตัว เมื่อ 3 หลักท้ายหารด้วย 8 ลงตัว

เช่น $8 \mid 588914120$ เพราะ $8 \mid 120$

8. หารด้วย 9 ลงตัว เมื่อ นำเลขโดดทุกหลักมาบวกกันหมดแล้วหารด้วย 9 ลงตัว

เช่น $9 \mid 369576$ เพราะ $9 \mid (3 + 6 + 9 + 5 + 7 + 6)$

9. หารด้วย 10 ลงตัว เมื่อ หลักหน่วยลงท้ายด้วย 0

เช่น $10 \mid 520$

ทฤษฎีบท ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid c$ แล้ว $a \mid c$

เช่น ถ้า $12 \mid 36$ และ $36 \mid 180$ แล้ว $12 \mid 180$

ทฤษฎีบท ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $a \mid b$ แล้ว $a \leq b$

เช่น ถ้า $5 \mid 40$ จะเห็นว่า $5 < 40$

ถ้า $14 \mid 14$ จะเห็นว่า $14 \leq 14$

พิสูจน์ เพราะว่า $a|b$ ดังนั้น จากบทนิยาม จะมีจำนวนเต็มบวก x ซึ่ง

$$b = ax$$

จะได้ $b - a = ax - a$

$$= a(x - 1)$$

เนื่องจาก a, x เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่าหรือเท่ากับ 1

ดังนั้น $a(x-1) \geq 0$

จะได้ $b - a = a(x-1) \geq 0$

ดังนั้น $a \leq b$

ทฤษฎีบท ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $a|b$ และ $a|c$ แล้ว $a|(bx+cy)$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนเต็มใดๆ จะเรียกนิพจน์ในรูป $bx + cy$ ว่า ผลรวมเชิงเส้น (linear combination) ของ b และ c

เช่น 4, 8 และ 12 เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $4|8$ และ $4|12$ จะได้ $4|(8 \cdot 2 + 12 \cdot 3)$


 จำนวนเต็มใดก็ได้

พิสูจน์ เพราะว่า $a|b$ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็ม n ซึ่ง $b = an$

เพราะว่า $a|c$ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $c = am$

ดังนั้น $bx = (an)x = a(nx)$

และ $cy = (am)y = a(my)$

เพราะฉะนั้น $bx + cy = a(nx) + a(my)$

$$bx + cy = a(nx + my) \quad \dots\dots\dots (1)$$

เนื่องจาก n, x, m และ y เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $nx + my$ เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น จาก (1) และบทนิยาม จะได้ $a|(bx + cy)$

ทฤษฎีบทของการหารลงตัวเพิ่มเติม

เมื่อ a , b และ c เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เท่ากับ 0

1. ถ้า $a \mid b$ แล้ว $a \mid bc$
2. ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ แล้ว $a \mid (b + c)$
3. ถ้า $a \mid b$ แล้ว $am \mid bm$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เท่ากับ 0
4. ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid a$ แล้ว $a = \pm b$
5. ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid (b + c)$ แล้ว $a \mid c$
6. ถ้า $a \mid b$ และ $c \mid d$ แล้ว $ac \mid bd$
7. ถ้า $a \mid b$ และ $b \neq 0$ จะได้ $|b| \geq |a|$
8. ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid a$ แล้ว $|a| = |b|$
9. $a \mid a$, $1 \mid a$ และ $a \mid 0$ เสมอ

ตัวอย่างที่ 1. กำหนด a เป็นจำนวนเต็ม และ $a \neq 0$ จงพิสูจน์ว่า

- (1) $a \mid 0$ (2) $1 \mid a$ (3) $a \mid a$

- พิสูจน์ (1) เนื่องจากมี 0 ที่ทำให้ $0 = a \cdot 0$ ดังนั้น $a \mid 0$
 (2) เนื่องจากมี a ที่ทำให้ $a = 1 \cdot a$ ดังนั้น $1 \mid a$
 (3) เนื่องจากมี 1 ที่ทำให้ $a = a \cdot 1$ ดังนั้น $a \mid a$

ตัวอย่างที่ 2. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid c$ แล้ว $a \mid c$

- พิสูจน์ เพราะว่า $a \mid b$ ดังนั้น จากบทนิยาม จะมีจำนวนเต็ม c ซึ่ง

$$b = ac \quad \dots\dots\dots (1)$$
 เพราะว่า $b \mid c$ ดังนั้น จากบทนิยาม จะมีจำนวนเต็ม d ซึ่ง

$$c = bd \quad \dots\dots\dots (2)$$

จากสมการ (1) และ (2) จะได้ว่า $c = (ac)d = a(cd) \dots\dots\dots (3)$

เนื่องจาก c และ d เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น cd เป็นจำนวนเต็ม
 ดังนั้น จาก (3) และบทนิยามจะได้ว่า $a \mid c$

ตัวอย่างที่ 3. ถ้า $a|b$ และ $c|d$ แล้ว จงพิสูจน์ว่า $ac|bd$

พิสูจน์ เพราะว่า $a|b$ ดังนั้น จากบทนิยาม จะมีจำนวนเต็ม x ซึ่ง

$$b = ax \quad \dots\dots\dots (1)$$

เพราะว่า $c|d$ ดังนั้น จากบทนิยาม จะมีจำนวนเต็ม y ซึ่ง

$$d = cy \quad \dots\dots\dots (2)$$

จากสมการ (1) และ (2) จะได้ว่า $bd = axcy = (ac)(xy) \quad \dots\dots\dots (3)$

เนื่องจาก x และ y เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น xy เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น จาก (3) และบทนิยามจะได้ว่า $ac|bd$

ตัวอย่างที่ 4. ถ้า $a|b$ และ $b|c$ แล้ว จงใช้บทนิยามพิสูจน์ว่า $a|(c-b)$

พิสูจน์ เพราะว่า $a|b$ ดังนั้น จากบทนิยาม จะมีจำนวนเต็ม x ซึ่ง

$$b = ax \quad \dots\dots\dots (1)$$

เพราะว่า $b|c$ ดังนั้น จากบทนิยาม จะมีจำนวนเต็ม y ซึ่ง

$$c = by = axy \quad \dots\dots\dots (2)$$

จากสมการ (1) และ (2) จะได้ว่า

$$c - b = axy - ax = a(xy - x) \quad \dots\dots\dots (3)$$

เนื่องจาก x และ y เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $xy - x$ เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น จาก (3) และบทนิยามจะได้ว่า $a|(c-b)$

ตัวอย่างที่ 5. ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $a \neq 0$

จงพิจารณาว่าข้อต่อไปนี้อยู่หรือผิด พร้อมให้เหตุผล

1. ถ้า $a|b$ และ $a|c$ แล้ว $a|bc$
2. ถ้า $a|bc$ แล้ว $a|b$ หรือ $a|c$
3. ถ้า $a|(b+c)$ แล้ว $a|b$ หรือ $a|c$

เฉลย

1. ถ้า $a|b$ และ $a|c$ แล้ว $a|bc$ เป็นความจริง

จาก $a|b$ แสดงว่า มีจำนวนเต็ม x ที่ทำให้ $b = ax$

และ $a|c$ แสดงว่ามีจำนวนเต็ม y ที่ทำให้ $c = ay$

ดังนั้น $bc = (ax)(ay) = a(xay)$ โดยที่ xay เป็นจำนวนเต็ม

นั่นคือ $a|bc$

2. ถ้า $a|bc$ แล้ว $a|b$ หรือ $a|c$ ไม่เป็นความจริง

เนื่องจาก ให้ $a = 6, b = 2, c = 3$

จะได้ว่า $6|(2) \cdot (3)$ แต่ $6 \nmid 2$ และ $6 \nmid 3$

3. ถ้า $a|(b + c)$ แล้ว $a|b$ หรือ $a|c$ ไม่เป็นความจริง

เนื่องจาก ให้ $a = 2, b = 3, c = -3$

จะได้ว่า $2|(3 + (-3))$ แต่ $2 \nmid 3$ และ $2 \nmid -3$

ตัวอย่างที่ 6. กำหนดให้ a, b, x และ y เป็นจำนวนเต็ม

จงพิสูจน์ว่าถ้า $a|(2x - 3y)$ และ $a|(4x - 5y)$ แล้ว $a|y$

พิสูจน์ เราต้องการ $a|y$ เราต้องทำตัวตั้งให้เหลือแต่ y

ใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้เข้าช่วย ถ้า $a|b$ และ $a|c$ แล้ว $a|(bx + cy)$

เพราะว่า $a|(2x - 3y)$ และ $a|(4x - 5y)$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad & a|(2x - 3y)(-2) + (4x - 5y) && \text{สามารถคูณเพิ่มเข้าไปได้} \\ & a|(-4x + 6y + 4x - 5y) \\ & \therefore a|y \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7. กำหนดให้ a, b, x และ y เป็นจำนวนเต็ม

จงพิสูจน์ว่าถ้า $a|(-4x + 3y)$ และ $a|(3x - 2y)$ แล้ว $a|x$

พิสูจน์ เราต้องการ $a|x$ เราต้องทำตัวตั้งให้เหลือแต่ x

ใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้เข้าช่วย ถ้า $a|b$ และ $a|c$ แล้ว $a|(bx + cy)$

เพราะว่า $a|(-4x + 3y)$ และ $a|(3x - 2y)$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad & a|(-4x + 3y)(2) + (3x - 2y)(3) && \text{สามารถคูณเพิ่มเข้าไปได้} \\ & a|(-8x + 6y + 9x - 6y) \\ & \therefore a|x \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 8. กำหนดให้ a, b, x และ y เป็นจำนวนเต็ม

จงพิสูจน์ว่าถ้า $a|(2x+3y)$ และ $a|(x-y)$ แล้ว

1. $a|5x$

2. $a|5y$

ใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้เข้าช่วย ถ้า $a|b$ และ $a|c$ แล้ว $a|(bx+cy)$

1. เราต้องทำ y ให้หมดไป

เพราะว่า $a|(2x+3y)$ และ $a|(x-y)$ ดังนั้น

ดังนั้น $a|(2x+3y)+(x-y)3$ สามารถคูณเพิ่มเข้าไปได้

$$a|(2x+3y)+(3x-3y)$$

$$\therefore a|5x$$

2. เราต้องทำ x ให้หมดไป

เพราะว่า $a|(2x+3y)$ และ $a|(x-y)$ ดังนั้น

ดังนั้น $a|(2x+3y)+(x-y)(-2)$

$$a|(2x+3y)+(-2x+2y)$$

$$\therefore a|5y$$

ตัวอย่างที่ 9. ถ้า d เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $d|(15k+27)$ และ $d|(3k+2)$ จงหาค่าของ d

วิธีทำ จะได้ว่า $d|[15k+27-5(3k+2)]$

$$d|15k+27-15k-10$$

$$\text{แสดงว่า } d|17$$

$$\text{ดังนั้น } d=1 \text{ หรือ } 17$$

ตัวอย่างที่ 10. จงแสดงว่า ถ้า n เป็นจำนวนคี่ แล้ว 4 หาร n^2-1 ลงตัว

พิสูจน์ เนื่องจาก n เป็นจำนวนคี่

จะได้ $n=2k-1$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม

$$\text{จะได้ } n^2-1 = (2k-1)^2-1$$

$$= 4k^2-4k+1-1$$

$$= 4(k^2-k), \quad k^2-k \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

$$\text{ดังนั้น } 4|n^2-1$$

ตัวอย่างที่ 11. จงแสดงว่า ถ้า a เป็นจำนวนเต็มแล้ว $2 \mid (a^2 - a)$

วิธีทำ แยกพิจารณาเป็น 2 กรณี

1. ให้ a เป็นจำนวนคู่

จะได้ว่า $a = 2k$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม

$$\text{ดังนั้น } a^2 - a = (2k)^2 - 2k$$

$$= 4k^2 - 2k$$

$$= 2(2k^2 - k), \quad 2k^2 - k \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

$$\text{ดังนั้น } 2 \mid (a^2 - a)$$

2. ให้ a เป็นจำนวนคี่

จะได้ว่า $a = 2k + 1$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม

จะได้ว่า $a = 2k + 1$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม

$$\text{ดังนั้น } a^2 - a = (2k + 1)^2 - (2k + 1)$$

$$= 4k^2 + 4k + 1 - 2k - 1$$

$$= 4k^2 + 2k$$

$$= 2(2k^2 + k), \quad 2k^2 + k \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

$$\text{ดังนั้น } 2 \mid (a^2 - a)$$

ตัวอย่างที่ 12. ถ้า $a \mid (2p - 3q)$ และ $a \mid (4p - 5q)$ จงแสดงว่า $a \mid q$

วิธีทำ เนื่องจาก $a \mid (2p - 3q)$

$$\text{จะได้ } 2p - 3q = ax, \quad x \text{ เป็นจำนวนเต็ม} \quad \dots\dots\dots (1)$$

เนื่องจาก $a \mid (4p - 5q)$

$$\text{จะได้ } 4p - 5q = ay, \quad y \text{ เป็นจำนวนเต็ม} \quad \dots\dots\dots (2)$$

นำ 2 คูณสมการ (1)

$$\text{จะได้ } 4p - 6q = 2ax \quad \dots\dots\dots (3)$$

นำสมการ (2) ลบ สมการ (3)

$$\text{จะได้ } q = ay - 2ax$$

$$= a(y - 2x) \quad \text{และ } y - 2x \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

$$\text{ดังนั้น } a \mid q$$

ตัวประกอบ

ตัวประกอบของจำนวนนับใด ๆ คือ จำนวนนับที่หารจำนวนนับนั้นได้ลงตัว

ตัวอย่างที่ 1. จงหาตัวประกอบทั้งหมดของ 18

1 เป็นตัวประกอบของ 18 เพราะ $18 \div 1 = 18$ ซึ่งหารได้ลงตัว

2 เป็นตัวประกอบของ 18 เพราะ $18 \div 2 = 9$ ซึ่งหารได้ลงตัว

3 เป็นตัวประกอบของ 18 เพราะ $18 \div 3 = 6$ ซึ่งหารได้ลงตัว

6 เป็นตัวประกอบของ 18 เพราะ $18 \div 6 = 3$ ซึ่งหารได้ลงตัว

9 เป็นตัวประกอบของ 18 เพราะ $18 \div 9 = 2$ ซึ่งหารได้ลงตัว

18 เป็นตัวประกอบของ 18 เพราะ $18 \div 18 = 1$ ซึ่งหารได้ลงตัว

ดังนั้น 1, 2, 3, 6, 9, 18 เป็นตัวประกอบทั้งหมดของ 18

วิธีแยกตัวประกอบอาจแบ่งได้ 3 วิธี

วิธีที่ 1 โดยการกระจายจำนวนนับให้อยู่ในรูปการคูณของจำนวนเฉพาะ เช่น

$$\begin{aligned} 198 &= 2 \times 99 \\ &= 2 \times 3 \times 33 \\ &= 2 \times 3 \times 3 \times 11 \end{aligned}$$

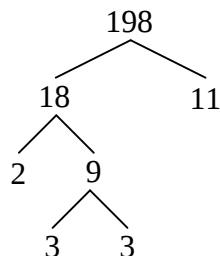
การแยกตัวประกอบของ $198 = 2 \times 3 \times 3 \times 11$

วิธีที่ 2 โดยวิธีตั้งหาร (หารสั้น)

$$\begin{array}{r} 2 \overline{)198} \\ \underline{2)99} \\ 3 \overline{)33} \\ \underline{3)11} \\ 11 \end{array}$$

การแยกตัวประกอบของ $198 = 2 \times 3 \times 3 \times 11$

วิธีที่ 3 โดยการใช้แผนภูมิต้นไม้



$\therefore$ การแยกตัวประกอบของ $198 = 2 \times 3 \times 3 \times 11$

ตัวอย่างที่ 2. จงเขียนจำนวนประกอบ 72 อยู่ในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะ

วิธีทำ $72 = 8 \times 9$

ดังนั้น $72 = 2^3 \times 3^2$

ตัวอย่างที่ 3. จงเขียนจำนวนประกอบ 252 อยู่ในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะ

วิธีทำ $252 = 2 \times 126$

$$= 2 \times (2 \times 63)$$

$$= 2 \times 2 \times (3 \times 21)$$

$$= 2 \times 2 \times 3 \times (3 \times 7)$$

$$= 2^2 \times 3^2 \times 7$$

ตัวอย่างที่ 4. จงเขียนจำนวนประกอบ 180 อยู่ในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะ

วิธีทำ $180 = 18 \times 10$

$$= 2 \times 9 \times 2 \times 5$$

$$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

จำนวนตัวประกอบของจำนวนนับ

เท่ากับผลคูณของผลบวกของเลขชี้กำลังของตัวประกอบเฉพาะแต่ละตัวกับ 1 กล่าวคือ

ถ้า $x, m, n, p, \dots$ เป็นจำนวนนับ

$a, b, c, \dots$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ $x = a^m \times b^n \times c^p \times \dots$ แล้วจำนวนตัวประกอบของ

จำนวนนับ $x = (m+1)(n+1)(p+1)\dots$

ตัวอย่างที่ 1. จงหาตัวประกอบของ

1. 16

2. 24

3. 27

4. 36

วิธีทำ

1. จำนวนนับที่หาร 16 ลงตัว เรียกว่าตัวประกอบของ 16 ได้แก่

1, 2, 4, 8, 16

ตอบ

หมายเหตุ จะพบว่า 16 มีตัวประกอบ 5 จำนวน

2. จำนวนนับที่หาร 24 ลงตัว เรียกว่าตัวประกอบของ 24 ได้แก่

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

ตอบ

หมายเหตุ จะพบว่า 24 มีตัวประกอบ 8 จำนวน

3. จำนวนนับที่หาร 27 ลงตัว เรียกว่าตัวประกอบของ 27 ได้แก่

1, 3, 9, 27

ตอบ

หมายเหตุ จะพบว่า 27 มีตัวประกอบ 4 จำนวน

4. จำนวนนับที่หาร 36 ลงตัว เรียกว่าตัวประกอบของ 36 ได้แก่

1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2. จงหาจำนวนตัวประกอบของ

1. 16

2. 24

3. 27

4. 36

วิธีทำ 1. ขั้นที่ 1 แยกตัวประกอบเฉพาะของ 16

$$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$= 2^4$$

ขั้นที่ 2 ใช้สูตรลัด

$$\text{จำนวนตัวประกอบของ } 16 = 4 + 1$$

$$= 5 \text{ จำนวน}$$

ตอบ

2. ขั้นที่ 1 แยกตัวประกอบเฉพาะของ 24

$$24 = 3 \times 8$$

$$= 3 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$= 3^1 \times 2^3$$

ขั้นที่ 2 ใช้สูตรลัด

$$\text{จำนวนตัวประกอบของ } 24 = (1+1)(3+1)$$

$$= 2 \times 4$$

$$= 8 \text{ จำนวน}$$

ตอบ

3. ขั้นที่ 1 แยกตัวประกอบเฉพาะของ 27

$$27 = 3 \times 3 \times 3$$

$$= 3^3$$

ขั้นที่ 2 ใช้สูตรลัด

$$\text{จำนวนตัวประกอบของ } 27 = (3+1)$$

$$= 4$$

4. ขั้นที่ 1 แยกตัวประกอบเฉพาะของ 36

$$\begin{aligned} 36 &= 4 \times 9 \\ &= (2 \times 2) \times (3 \times 3) \\ &= 2^2 \times 3^2 \end{aligned}$$

ขั้นที่ 2 ใช้สูตรลัด

$$\begin{aligned} \text{จำนวนตัวประกอบของ } 36 &= (2+1)(2+1) \\ &= 3 \times 3 \\ &= 9 \text{ จำนวน} \end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3. จำนวนเต็มบวกที่หาร 12 ได้ลงตัวมีกี่จำนวน

- ก. 6 ข. 7 ค. 8 ง. 9

วิธีทำ ตัวประกอบของของ 1,2,3,4,6,12 มีทั้งหมด 6 จำนวน

ตัวอย่างที่ 4. จงหาผลบวกของจำนวนเต็มบวกที่หาร 12 ได้ลงตัวมีกี่จำนวน

- ก. 28 ข. 29 ค. 30 ง. 31

วิธีทำ ตัวประกอบของของ 1,2,3,4,6,12 มีทั้งหมด 6 จำนวน

$$\text{หาผลบวก } 1+2+3+4+6+12 = 28$$

ตัวอย่างที่ 5. จำนวนตัวประกอบของ 3,600 มีทั้งหมดกี่จำนวน

วิธีทำ ถ้า A เป็นจำนวนนับ, m, n, p เป็นจำนวนนับ

จะได้ $A = a^m \cdot b^n \cdot c^p$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนเฉพาะ

จะได้จำนวนตัวประกอบของ $A = (m+1)(n+1)(p+1)$ จำนวน

$$\text{ดังนั้น } 3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$$

$$\text{จำนวนตัวประกอบของ } 3600 = (4+1)(2+1)(2+1) = 45 \text{ จำนวน}$$

ตัวอย่างที่ 6. จงหาจำนวนตัวประกอบของ

1. 256 2. 432 3. 252

วิธีทำ 1. $256 = 8 \times 32$

$$\begin{aligned} &= 8 \times 8 \times 4 \\ &= 2^3 \times 2^3 \times 2^2 \\ &= 2^{3+3+2} \\ &= 2^8 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{จำนวนตัวประกอบของ } 256 = (8+1)$$

$$= 9 \text{ จำนวน}$$

ตอบ

$$2. 432 = 8 \times 54$$

$$= 8 \times 2 \times 27$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 (3 \times 3 \times 3)$$

$$= 2^4 \times 3^3$$

$$\therefore \text{จำนวนตัวประกอบ } 432 = (4+1)(3+1)$$

$$= 5 \times 4$$

$$= 20 \text{ จำนวน}$$

ตอบ

$$3. 252 = 4 \times 63$$

$$= 4 \times 9 \times 7$$

$$= 2^2 \times 3^2 \times 7^1$$

$$\therefore \text{จำนวนตัวประกอบของ } 252 = (2+1)(2+1)(1+1)$$

$$= 3 \times 3 \times 2$$

$$= 18 \text{ จำนวน}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 7. จงหาจำนวนตัวประกอบของ

$$1. 8^2 \times 3^3$$

$$2. 12 \times 10^3$$

$$3. 6 \times 15^2 \times 49^2$$

วิธีทำ 1. $8^2 \times 3^3 = (2^3)^2 \times 3^3$

$$= 2^6 \times 3^3$$

$$\therefore \text{จำนวนตัวประกอบของ } 8^2 \times 3^3 = (6+1)(3+1)$$

$$= 7 \times 4$$

$$= 28 \text{ จำนวน}$$

ตอบ

$$2. 12 \times 10^3 = 3 \times 4 (2 \times 5)^3$$

$$= 3 \times 2^2 \times 2^3 \times 5^3$$

$$= 3 \times 2^{2+3} \times 5^3$$

$$= 3 \times 2^5 \times 5^3$$

$$\therefore \text{จำนวนตัวประกอบของ } 12 \times 10^3 = (1+1)(5+1)(3+1)$$

$$= 2 \times 6 \times 4$$

$$= 48 \text{ จำนวน}$$

ตอบ

$$3. \quad 6 \times 15^2 \times 49^2 = (2 \times 3) \times (3 \times 5)^2 \times (7^2)^2$$

$$= 2 \times 3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^4$$

$$= 2 \times 3^{1+2} \times 5^2 \times 7^4$$

$$= 2 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^4$$

$$\therefore \text{จำนวนตัวประกอบของ } 6 \times 15^2 \times 49^2 = (1+1)(3+1)(2+1)(4+1)$$

$$= 2 \times 4 \times 3 \times 5$$

$$= 120 \text{ จำนวน}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 8. จำนวนนับที่หาร 12,544 ลงตัวมีกี่จำนวน

วิธีทำ $12,544 = 8 \times 1,568$

$$= 8 \times 8 \times 196$$

$$= 8 \times 8 \times 4 \times 49$$

$$= (2^3) \times (2^3) \times (2^2) \times (7^2)$$

$$= 2^8 \times 7^2$$

$$\therefore \text{จำนวนตัวประกอบของ } 12,544 = (8+1)(2+1)$$

$$= 9 \times 3$$

$$= 27 \text{ จำนวน}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 9. จำนวนเต็มบวกซึ่งหาร $(30)^3$ ลงตัวมีทั้งหมดกี่จำนวน

วิธีทำ พิจารณา $(30)^3 = (2 \times 3 \times 5)^3$

$$= 2^3 \times 3^3 \times 5^3$$

$$\therefore \text{จำนวนเต็มบวกที่หาร } (30)^3 \text{ มี } = (3+1)(3+1)(3+1)$$

$$= 64 \text{ จำนวน}$$

ตัวอย่างที่ 10. จำนวนเต็มบวกที่หาร 3,000 ได้ลงตัวมีกี่จำนวน

ก. 28

ข. 32

ค. 36

ง. 40

วิธีทำ $3,000 = 3 \times 1000$

$$= 3 \times 100 \times 10$$

$$= 3 \times 25 \times 4 \times 5 \times 2$$

$$= 3 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 5 \times 2$$

$$= 2^3 \times 3 \times 5^3$$

จำนวนเต็มบวกที่หาร 3,000 ได้ลงตัวหาได้จากเอาเลขชี้กำลังบวกไป 1

$$\text{แล้วนำเลขชี้กำลังคูณกัน} = (3+1)(1+1)(3+1) = 32$$

ตัวอย่างที่ 11. จงหาจำนวนเฉพาะที่เป็นบวกที่หาร 3,000 ได้ลงตัวมีกี่จำนวน

ก. 3

ข. 4

ค. 5

ง. 6

วิธีทำ จาก

$$3,000 = 3 \times 1000$$

$$= 2^3 \times 3 \times 5^3 \Leftarrow \text{จำนวนเฉพาะมี 3 ตัว}$$

ตัวอย่างที่ 12.

1. จงหา n ถ้า 2^n เป็นจำนวนนับที่มีตัวประกอบ 9 จำนวน

2. จงหาจำนวนนับ 3^n ซึ่งมีตัวประกอบ 6 จำนวน

วิธีทำ 1. 2^n มีจำนวนตัวประกอบ 9 จำนวนก็ต่อเมื่อ

$$n+1=9$$

$$n=8$$

2. 3^n มีจำนวนตัวประกอบ 6 จำนวนก็ต่อเมื่อ

$$n+1=6$$

$$n=5$$

$\therefore$ จำนวนนับ $3^n = 3^5$

$$= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$= 243$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 13.

1. จงหา n ถ้า $2^n \cdot 3^{n+1}$ เป็นจำนวนนับที่มีตัวประกอบ 20 จำนวน

2. จงหา n ถ้า $2^n \cdot 3^{n+1} \times 5^{n+2}$ เป็นจำนวนนับที่มีตัวประกอบ 24 จำนวน

วิธีทำ 1. $2^n \cdot 3^{n+1}$ เป็นจำนวนนับที่มีตัวประกอบ 20 จำนวนก็ต่อเมื่อ

$$(n+1)(n+1+1) = 20$$

$$(n+1)(n+2) = 20$$

$$n^2 + 3n + 2 = 20$$

$$n^2 + 3n - 18 = 0$$

$$(n+6)(n-3) = 0$$

$$n = -6, 3$$

$$n = 3 \text{ เท่านั้น}$$

ตอบ

2. n ถ้า $2^n \cdot 3^{n+1} \times 5^{n+2}$ เป็นจำนวนนับที่มีตัวประกอบ 24 จำนวนก็ต่อเมื่อ

$$(n+1)(n+1+1)(n+2+1) = 24$$

$$(n+1)(n+2)(n+3) = 24$$

$$n^3 + 6n^2 + 11n + 6 = 24$$

$$n^3 + 6n^2 + 11n - 18 = 0$$

$$(n-1)(n^2 + 7n + 18) = 0$$

$$n = 1, \quad n = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 72}}{2}$$

$\therefore n = 1$ เท่านั้น

ตอบ

ตัวอย่างที่ 14.

1. จงหาจำนวนนับ 4^{2n} ซึ่งมีจำนวนตัวประกอบ 11 จำนวน
2. จงหาจำนวนนับ $3^n \times 5^{n-1}$ ซึ่งมีจำนวนตัวประกอบ 12 จำนวน
3. จงหาจำนวนนับ $9^{2n} \times 6^n$ ซึ่งมีจำนวนตัวประกอบ 12 จำนวน

วิธีทำ 1. 4^{2n} หรือ 2^{4n} มีจำนวนตัวประกอบ 11 จำนวนก็ต่อเมื่อ

$$4n + 1 = 11$$

$$4n = 10$$

$$n = \frac{5}{2}$$

$$\therefore \text{จำนวนนับ } 4^{2n} = 4^{2 \times \frac{5}{2}}$$

$$= 4^5$$

$$= 1,024$$

2. $3^n \times 5^{n-1}$ เป็นจำนวนนับที่มีตัวประกอบ 12 จำนวนก็ต่อเมื่อ

$$(n+1)(n-1+1) = 12$$

$$(n+1)n = 12$$

$$n^2 + n - 12 = 0$$

$$(n+4)(n-3) = 0$$

$$n = -4, 3$$

$$n = 3 \text{ เท่านั้น}$$

$$\therefore \text{จำนวนนับ } 3^n \times 5^{n-1} = 3^3 \times 5^{3-1}$$

$$= 3^3 \times 5^2$$

$$= 27 \times 25$$

$$= 675$$

ตอบ

3. จำนวนนับ $9^{2n} \times 6^n = 3^{4n} \times 3^n \times 2^n$

$$= 3^{5n} \times 2^n$$

$$\therefore (5n+1)(n+1) = 12$$

$$5n^2 + 6n - 11 = 0$$

$$(5n + 11)(n - 1) = 0$$

$$n = 1$$

$$\text{จำนวนนับ } 9^{2n} \times 6^n = 81 \times 6$$

$$= 486$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 15. จงแยกตัวประกอบของจำนวนนับ $5^n \times 6^{n-1}$ ซึ่งมีตัวประกอบ 36 จำนวน

วิธีทำ $5^n \times 6^{n-1}$ หรือ $5^n \times 2^{n-1} \times 3^{n-1}$ เป็นจำนวนนับที่มีตัวประกอบ 36 จำนวนก็ต่อเมื่อ

$$(n+1)(n-1+1)(n-1+1) = 36$$

$$(n+1)n^2 = 36$$

$$n^3 + n^2 - 36 = 0$$

$$(n-3)(n^2 + 4n + 12) = 0$$

$$n = 3, \quad n = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 48}}{2}$$

$$n = 3, \quad n = \frac{-4 \pm \sqrt{-32}}{2}$$

$$\therefore n = 3 \text{ เท่านั้น}$$

$$\therefore \text{ตัวประกอบของ } 5^n \times 6^{n-1} \text{ ซึ่งมีตัวประกอบ 36 จำนวน} = 5^3 \times 6^{3-1}$$

$$= 5^n \times 6^2$$

$$= 5^3 \times 3^2 \times 2^2 \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 16. จงหาจำนวนนับ $3^n \times 5^m$ ที่มีค่ามากที่สุด และมีตัวประกอบ 6 จำนวน เมื่อ n และ m เป็นจำนวนนับ

วิธีทำ $3^n \times 5^m$ มีค่ามากที่สุด และมีตัวประกอบ 6 จำนวนก็ต่อเมื่อ

$$(n+1)(m+1) = 6$$

$$\text{ถ้า } n=1, m=2 \text{ แล้ว } (1+1)(2+1) = 6$$

$$\therefore 3^n \times 5^m = 3 \times 5^2 = 75$$

$$\text{ถ้า } n=2, m=1 \text{ แล้ว } (1+2)(1+1) = 6$$

$$\therefore 3^n \times 5^m = 3^2 \times 5 = 45$$

$$\therefore 75 \text{ เป็นจำนวนนับมากที่สุด}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 17. จงหาจำนวนนับ $2^n \times 3^m$ ที่มีค่าน้อยที่สุด และมีตัวประกอบ 12 จำนวน เมื่อ n และ m เป็นจำนวนที่ต่อเมื่อ

วิธีทำ $2^n \cdot 3^m$ เป็นจำนวนนับที่มีตัวประกอบ 12 จำนวน ก็ต่อเมื่อ

$$(n+1)(m+1)=12$$

ถ้า $n=1, m=5$ แล้ว $(1+1)(5+1)=12$

$$\therefore 2^n \cdot 3^m = 2^1 \times 3^5 = 483$$

ถ้า $n=2, m=3$ แล้ว $(2+1)(3+1)=12$

$$\therefore 2^n \cdot 3^m = 2^2 \times 3^3 = 108$$

ถ้า $n=3, m=2$ แล้ว $(3+1)(2+1)=12$

$$\therefore 2^n \cdot 3^m = 2^3 \times 3^2 = 72$$

ถ้า $n=5, m=1$ แล้ว $(5+1)(1+1)=12$

$$\therefore 2^n \cdot 3^m = 2^5 \times 3^1 = 160$$

$$\therefore 72 \text{ เป็นจำนวนนับที่น้อยที่สุด}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 18. จงหาผลบวกของจำนวนเต็มบวกที่หาร 3,000 ได้ลงตัวมีค่าเท่าใด

ก. 9,360

ข. 9,364

ค. 9,368

ง. 9,370

วิธีทำ จาก

$$3,000 = 3 \times 1000$$

$$= 2^3 \times 3 \times 5^3$$

$$\text{ให้ทำดังนี้} = (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3)(3^0 + 3^1)(5^0 + 5^1 + 5^2 + 5^3)$$

$$= (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3)(3^0 + 3^1)(5^0 + 5^1 + 5^2 + 5^3)$$

$$= (1+2+4+8)(1+3)(1+5+25+125)$$

$$= (15)(4)(156) = 9,360 \leftarrow \text{ผลบวกของจำนวนที่หาร 3,000 ได้ลงตัว}$$

ตัวอย่างที่ 19. จงหาผลบวกของจำนวนเต็มบวกที่เป็นจำนวนเฉพาะที่หาร 3,000 ได้ลงตัวมีค่าเท่าใด

ก. 8

ข. 9

ค. 10

ง. 11

วิธีทำ จาก

$$3,000 = 3 \times 1000$$

$$\text{เอาจำนวนเฉพาะมาบวกกัน} \quad = 2^3 \times 3 \times 5^3 \Rightarrow 2+3+5=10$$

การหาจำนวนที่หารได้ลงตัว

เช่น จาก 1 - 10 มีเลขที่หารด้วย 3 ลงตัว กี่ตัว ตอบ = 3 จำนวน คือ 3 , 6 , 9

มีเลขที่หารด้วย 4 ลงตัว กี่ตัว ตอบ = 2 จำนวน คือ 4 , 8

มีเลขที่หารด้วย 7 ลงตัว กี่ตัว ตอบ = 1 จำนวน คือ 7

จะได้สูตรที่ผ่านการ ทดสอบแล้ว ว่าให้นำตัวเลขที่ถูกถาม ไปหารจำนวนสุดท้าย

โดยไม่ต้องสนใจเศษ

ตัวอย่างที่ 1. ตั้งแต่ 1 ถึง 100

1. มีกี่จำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว

$$= \frac{100}{3} = 33 \text{ จำนวน} \quad \text{ไม่ต้องสนใจเศษ}$$

2. มีกี่จำนวนที่หารด้วย 6 ลงตัว

$$= \frac{100}{6} = 16 \text{ จำนวน} \quad \text{ไม่ต้องสนใจเศษ}$$

3. มีกี่จำนวนที่หารด้วย 7 ลงตัว

$$= \frac{100}{7} = 14 \text{ จำนวน} \quad \text{ไม่ต้องสนใจเศษ}$$

4. มีกี่จำนวนที่หารด้วย 8 ลงตัว

$$= \frac{100}{8} = 12 \text{ จำนวน} \quad \text{ไม่ต้องสนใจเศษ}$$

ตัวอย่างที่ 2. มีกี่จำนวนที่มีค่าตั้งแต่ 1 - 1000 ที่หารด้วย 5 ลงตัว

$$= \frac{1000}{5} = 200 \text{ จำนวน}$$

ตัวอย่างที่ 3. มีกี่จำนวนที่มีค่าตั้งแต่ 1 - 1000 ที่หารด้วย 7 ลงตัว

$$= \frac{1000}{7} = 142 \text{ จำนวน} \quad \text{ไม่ต้องสนใจเศษ}$$

ตัวอย่างที่ 4. มีกี่จำนวนที่มีค่าตั้งแต่ 0 - 1000 ที่หารด้วย 5 ลงตัว

ให้คิดตั้งแต่ 1 - 1000 ที่หารด้วย 5 ลงตัวก่อนบวกกับ 1 เสมอเพราะ $= \frac{0}{5} = 0$ ลงตัวแน่นอนอีก 1 จำนวน

$$= \frac{1000}{5} + 1 = 201 \text{ จำนวน}$$

ตัวอย่างที่ 5. มีกี่จำนวนที่มีค่าตั้งแต่ 0 – 1000 ที่หารด้วย 10 ลงตัว

$$= \frac{1000}{10} + 1 = 101 \text{ จำนวน}$$

ตัวอย่างที่ 6. จำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 1000 และหารด้วย 3 หรือ 5 ลงตัวจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 467

2. 200

3. 233

4. 266

(ข้อ 1)

หารด้วย 3 ลงตัว $= \frac{1000}{3} = 333$ จำนวน **ไม่ต้องสนใจเศษ**

หารด้วย 5 ลงตัว $= \frac{1000}{5} = 200$ จำนวน **ไม่ต้องสนใจเศษ**

หารด้วย 3 และ 5 ลงตัวคือ 15 หารลงตัวนั่นเอง $= \frac{1000}{15} = 66$ **ไม่ต้องสนใจเศษ**

(หารด้วย 3 หรือ 5 ลงตัว) เท่ากับ (หารด้วย 3 ลงตัว) บวก (หารด้วย 5 ลงตัว) ลบ (หารด้วย 15 ลงตัว)
 $= 333 + 200 - 66 = 467$ จำนวน

ตัวอย่างที่ 7. จำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 500 และหารด้วย 3 หรือ 5 ลงตัวจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 167

2. 200

3. 233

4. 266

(ข้อ 3)

หารด้วย 3 ลงตัว $= \frac{500}{3} = 166$ **ไม่ต้องสนใจเศษ**

หารด้วย 5 ลงตัว $= \frac{500}{5} = 100$ **ไม่ต้องสนใจเศษ**

หารด้วย 3 และ 5 ลงตัวคือ 15 หารลงตัวนั่นเอง $= \frac{500}{15} = 33$ **ไม่ต้องสนใจเศษ**

(หารด้วย 3 หรือ 5 ลงตัว) เท่ากับ (หารด้วย 3 ลงตัว) บวก (หารด้วย 5 ลงตัว) ลบ (หารด้วย 15 ลงตัว)
 $= 166 + 100 - 33 = 233$ จำนวน

ลองทำดู

ตั้งแต่ 1 ถึง 60

1. มีกี่จำนวนที่หารด้วย 2 ลงตัว (30)

2. มีกี่จำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว (20)

3. ตั้งแต่ 1 ถึง 60 ดังกล่าวมีทั้งหมดกี่จำนวน (60)

4. มีกี่จำนวนที่หารด้วย 2 และ 3 ลงตัว (10)

5. มีกี่จำนวนที่หารด้วย 2 หรือ 3 ลงตัว (40)

6. มีกี่จำนวนที่หารด้วย 2 ลงตัว แต่หารด้วย 3 ไม่ลงตัว (20)

7. มีกี่จำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว แต่หารด้วย 2 ไม่ลงตัว (10)

คิดลัดการหารลงตัว

ปิดเศษขึ้นไม่ว่าจะได้เท่าไร

$$\frac{\text{ปลาย}}{x} - \frac{\text{ต้น}}{x} + 1$$

ปิดเศษทิ้งไม่ว่าจะได้เท่าไร

ตัวอย่างที่ 20. ตั้งแต่ 200 ถึง 1000

1. มีกี่จำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว
2. มีกี่จำนวนที่หารด้วย 7 ลงตัว
3. ตั้งแต่ 200 ถึง 1000 ดังกล่าวมีทั้งหมดกี่จำนวน
4. มีกี่จำนวนที่หารด้วย 3 และ 7 ลงตัว
5. มีกี่จำนวนที่หารด้วย 3 หรือ 7 ลงตัว
6. มีกี่จำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว แต่หารด้วย 7 ไม่ลงตัว
7. มีกี่จำนวนที่หารด้วย 7 ลงตัว แต่หารด้วย 3 ไม่ลงตัว

1. มีกี่จำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว (267)

วิธีทำ

$$\frac{\text{ปลาย}}{x} - \frac{\text{ต้น}}{x} + 1$$

$$\frac{1000}{3} - \frac{200}{3} + 1$$

$$333.33 - 66.66 + 1$$

$$333 - 67 + 1 = 267$$

2. มีกี่จำนวนที่หารด้วย 7 ลงตัว (114)

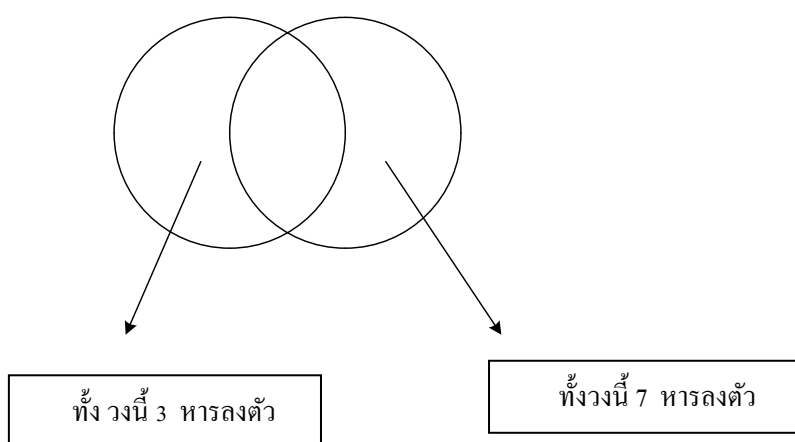
วิธีทำ

$$\frac{\text{ปลาย}}{x} - \frac{\text{ต้น}}{x} + 1$$

$$\frac{1000}{7} - \frac{200}{7} + 1$$

$$142.857 - 28.571 + 1$$

$$142 - 29 + 1 = 114$$



3. ตั้งแต่ 200 ถึง 1000 ดังกล่าวมีทั้งหมดกี่จำนวน (801)

หาจำนวนตัว ปลาย- ต้น+1

$$1000 - 200 + 1 = 801$$

4. มีกี่จำนวนที่หารด้วย 3 และ 7 ลงตัว (38)

หารด้วย 3 และ 7 ลงตัว หมายถึง ไปหา ค.ร.น. ของ 3 และ 7 คือ 21

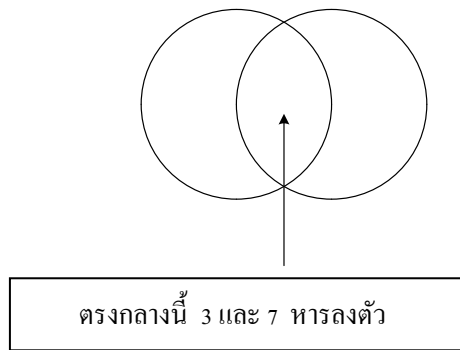
วิธีทำ

$$\frac{\text{ปลาย}}{x} - \frac{\text{ต้น}}{x} + 1$$

$$\frac{1000}{21} - \frac{200}{21} + 1$$

$$47.619 - 9.523 + 1$$

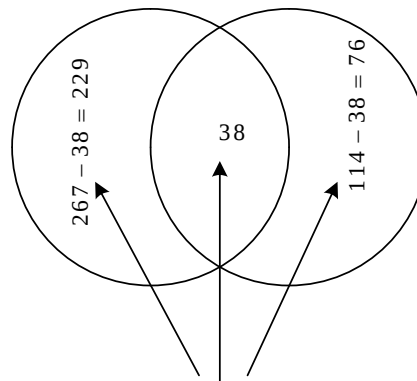
$$47 - 10 + 1 = 38$$



5. มีกี่จำนวนที่หารด้วย 3 หรือ 7 ลงตัว (343)

หารด้วย 3 หรือ 7 ลงตัว = (หารด้วย 3 ลงตัว) + (หารด้วย 7 ลงตัว) - (หารด้วย 3 และ 7 ลงตัว)

$$\text{หารด้วย 3 หรือ 7 ลงตัว} = 267 + 114 - 38 = 343$$

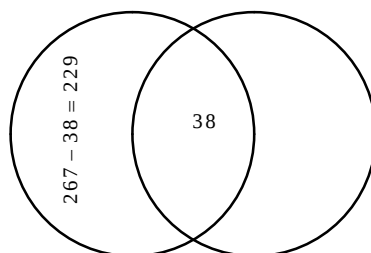


นำสามชิ้นมารวมกัน

6. มีกี่จำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว แต่หารด้วย 7 ไม่ลงตัว (229)

จำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว แต่หารด้วย 7 ไม่ลงตัว = (หารด้วย 3 ลงตัว) - (หารด้วย 3 และ 7 ลงตัว)

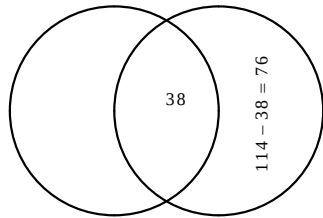
$$\text{จำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว แต่หารด้วย 7 ไม่ลงตัว} = 267 - 38 = 229$$



7. มีกี่จำนวนที่หารด้วย 7 ลงตัว แต่หารด้วย 3 ไม่ลงตัว (76)

จำนวนที่หารด้วย 7 ลงตัว แต่หารด้วย 3 ไม่ลงตัว = (หารด้วย 7 ลงตัว) - (หารด้วย 3 และ 7 ลงตัว)

จำนวนที่หารด้วย 7 ลงตัว แต่หารด้วย 3 ไม่ลงตัว = $114 - 38 = 76$

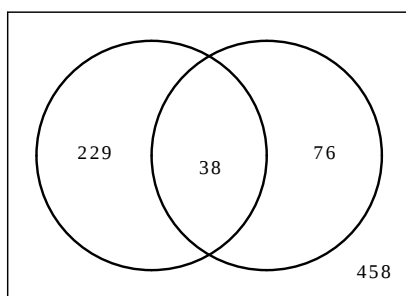


8. มีกี่จำนวนที่หารด้วย 3 หรือ 7 ไม่ลงตัว (458)

จำนวนที่หารด้วย 3 หรือ 7 ไม่ลงตัว = (จำนวนทั้งหมด) - (หารด้วย 3 หรือ 7 ลงตัว)

จำนวนที่หารด้วย 3 หรือ 7 ไม่ลงตัว = $801 - 343 = 458$

ทั้งหมดมี



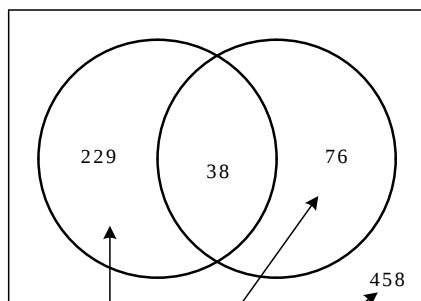
อยู่นอกวง

9. มีกี่จำนวนที่หารด้วย 3 และ 7 ไม่ลงตัว (763)

จำนวนที่หารด้วย 3 และ 7 ไม่ลงตัว = (จำนวนทั้งหมด) - (หารด้วย 3 และ 7 ลงตัว)

จำนวนที่หารด้วย 3 และ 7 ไม่ลงตัว = $801 - 38 = 763$

801



$$229 + 76 + 458 = 763$$

หรือคิดจากแผนภาพ

ลองทำดู

1. จำนวนเต็มตั้งแต่ 16 ถึง 775 ที่หารด้วย 3 ลงตัว มีกี่จำนวน (ตอบ $n = 253$)
2. จำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 13 กับ 221 ที่หารด้วย 2 และ 3 ลงตัว มีกี่จำนวน (ตอบ $n = 34$)
3. จำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 20 กับ 153 ที่ 3 หารไม่ลงตัว มีกี่จำนวน (ตอบ $n = 90$)
4. จำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 72 กับ 300 ที่ 3 และ 7 หารไม่ลงตัว มีกี่จำนวน (ตอบ $n = 218$)
5. จำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 32 กับ 400 ที่หารด้วย 9 แล้วเหลือเศษ 4 มีกี่จำนวน (ตอบ $n = 44$)
6. จำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 12 กับ 520 ที่หารด้วย 6 ลงตัว แต่หารด้วย 5 ไม่ลงตัว มีกี่จำนวน (ตอบ 67)
7. จำนวนสมาชิกในเซต $\{100, 101, 102, \dots, 600\}$ ซึ่งหารด้วย 8 หรือ 12 ลงตัวเท่ากับข้อใด (ตอบ 84)

จำนวนเฉพาะ

บทนิยาม จำนวนเต็มบวก p จะเป็นจำนวนเฉพาะก็ต่อเมื่อ $p \neq 1$

และถ้าจำนวนเต็ม x หาร p ลงตัวแล้ว $x \in \{-1, 1, p, -p\}$

จำนวนเต็มบวกอื่นๆ ที่ไม่ใช่ 1 และไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

เรียกว่า จำนวนประกอบ (composite numbers)

ทฤษฎีบทของจำนวนเฉพาะ

1. ทุกๆ จำนวนเต็ม n ที่มากกว่า 1 จะมีจำนวนเฉพาะ p ที่ $p \mid n$
2. มีจำนวนเฉพาะอยู่นันต์ตัว
3. เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มใดๆ และ p เป็นจำนวนเฉพาะ ถ้า $p \mid ab$ แล้ว $p \mid a$ หรือ $p \mid b$
4. เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะบวกทั้งคู่ ถ้า $p \mid q$ แล้ว $p = q$
5. ทุกๆ จำนวนเต็ม n ที่มากกว่า 1 จะสามารถแยกตัวประกอบดังต่อไปนี้ได้รูปแบบเดียว คือ
$$n = p_1^{c_1} \cdot p_2^{c_2} \cdot \dots \cdot p_k^{c_k} \text{ โดยที่ } p_1 < p_2 < \dots < p_k \text{ และทุก } p_i \text{ เป็นจำนวนเฉพาะ}$$

เมื่อ $i = 1, 2, \dots, k$

ตัวอย่าง จงเขียน 4,725 ให้เป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะบวก

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ } 4,725 &= 3 \times 1,575 \\ &= 3 \times 3 \times 535 \\ &= 3 \times 3 \times 3 \times 175 \\ &= 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 35 \\ &= 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7\end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ } 4,725 = 3^2 \times 5^2 \times 7 \quad \text{ตอบ}$$

ทฤษฎีบทที่จะกล่าวต่อไปนี้จะมีส่วนช่วยในการตรวจสอบ จำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 ว่า จำนวนนั้น เป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่

ทฤษฎีบท ถ้า n เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $n > 1$ และ n เป็นจำนวนประกอบ แล้ว จะมีจำนวนเฉพาะ p ซึ่ง $p \leq \sqrt{n}$ และ $p | n$

หรือ จากทฤษฎี อาจกล่าวได้ว่า

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $n > 1$ และจำนวนเฉพาะบวกทุกจำนวนที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ $\sqrt{n}$ หาร n ไม่ลงตัว แล้ว n จะเป็นจำนวนเฉพาะ

จากทฤษฎีบทดังกล่าว มีประโยชน์ต่อการตรวจสอบจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 จะเป็นจำนวนเฉพาะจำนวนประกอบ โดยมีวิธีการดังนี้

ขั้นที่ 1 หาจำนวนเฉพาะบวกทั้งหมดซึ่งน้อยกว่า หรือเท่ากับ $\sqrt{n}$

ขั้นที่ 2 ถ้าจำนวนเฉพาะบวกดังกล่าวทุกจำนวน หาร n ไม่ลงตัว ก็แสดงว่า n เป็นจำนวนเฉพาะ

ตัวอย่างที่ 1. จงตรวจสอบดูว่า 221 และ 211 เป็นจำนวนเฉพาะหรือจำนวนประกอบ

วิธีทำ

1. ตรวจสอบ 221

$$\text{เพราะว่า } 14 < \sqrt{221} < 15$$

ดังนั้น จำนวนเฉพาะบวกที่น้อยกว่า หรือเท่ากับ $\sqrt{221}$ ได้แก่ 2, 3, 5, 7, 11, 13

เมื่อนำจำนวนเฉพาะบวกเหล่านี้ไปหาร 221 พบว่า $13 | 221$ และ $221 = 13 \cdot 17$

2. ตรวจสอบ 211

$$\text{เพราะว่า } 14 < \sqrt{211} < 15$$

ดังนั้น จำนวนเฉพาะบวกที่น้อยกว่า หรือเท่ากับ $\sqrt{211}$ ได้แก่ 2, 3, 5, 7, 11, 13

เมื่อนำจำนวนเฉพาะบวกเหล่านี้ไปหาร 211 พบว่าไม่มีจำนวนใดหาร 211 ลงตัว

แสดงว่า 211 เป็นจำนวนเฉพาะ

ตัวอย่างที่ 2. จงใช้วิธีดังตัวอย่างตรวจสอบว่า 283 , 323 เป็นจำนวนเฉพาะ หรือจำนวนประกอบ

วิธีทำ

1. ตรวจสอบ 283

$$\text{เพราะว่า } 16 < \sqrt{283} < 17$$

ดังนั้น จำนวนเฉพาะบวกที่น้อยกว่า หรือเท่ากับ $\sqrt{283}$ ได้แก่ 2, 3, 5, 7, 11, 13

เมื่อนำจำนวนเฉพาะบวกเหล่านี้ไปหาร 283 พบว่า ไม่มีจำนวนใดหารลงตัว

ดังนั้น 283 เป็นจำนวนเฉพาะ

วิธีทำ

1. ตรวจสอบ 323

$$\text{เพราะว่า } 17 < \sqrt{323} < 18$$

ดังนั้น จำนวนเฉพาะบวกที่น้อยกว่า หรือเท่ากับ $\sqrt{323}$ ได้แก่ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17

เมื่อนำจำนวนเฉพาะบวกเหล่านี้ไปหาร 323 พบว่า ไม่มีจำนวนใดหารลงตัว

ดังนั้น 323 เป็นจำนวนเฉพาะ

ตัวอย่างที่ 3. จำนวนต่อไปนี้จำนวนใดบ้างเป็นจำนวนเฉพาะ (ตอบ 149)

149 , 187 , 209 , 221 , 323

ตัวอย่างที่ 4. จำนวนในข้อใดเป็นจำนวนเฉพาะ (ตอบ 4)

1. 209,221 2. 487,341 3. 247,323 4. 149,271

ทฤษฎีบท 4 ทฤษฎีบทหลักมูลทางเลขคณิต (The Fundamental Theorem of Arithmetic)

จำนวนเต็มบวกทุกจำนวนที่มากกว่า 1 สามารถเขียนได้ในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะได้เพียงแบบเดียวเท่านั้น ทั้งนี้ไม่รวมกับการสลับที่ตัวคูณหรือการคูณด้วย 1

ขั้นตอนวิธีการหาร

ตัวอย่างที่ 1. การหาร 15 ด้วย 4 พิจารณาได้ดังนี้

ให้ q แทน	0	1	2	3	4	5	6	7	...
4q จะได้	0	4	8	12	16	20	24	28	...

$$15 \div 4 = 3 \text{ เศษ } 3$$

เขียนได้ในรูป $15 = 4(3) + 3$



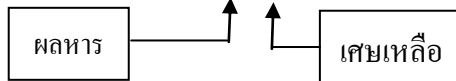
ตัวอย่างที่ 2. การหาร -17 ด้วย 5 พิจารณาได้ดังนี้

ให้ q แทน $0 \quad -1 \quad -2 \quad -3 \quad -4 \quad -5 \quad -6 \quad -7 \quad \dots$
 $5q$ จะได้ $0 \quad -5 \quad -10 \quad -15 \quad -20 \quad -25 \quad -30 \quad -35 \quad \dots$

-17

$$\begin{aligned} \frac{-17}{5} &= \frac{-20+3}{5} \\ &= \frac{-20}{5} + \frac{3}{5} \\ &= -4 + \frac{3}{5} \end{aligned}$$

เขียนได้ในรูป $-17 = 5(-4) + 3$



ทฤษฎีบท 5 ขั้นตอนวิธีการหาร ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $b \neq 0$ แล้ว จะมีจำนวนเต็ม q และ r ชุดเดียว ซึ่ง

$$a = bq + r \text{ โดย } 0 \leq r < |b|$$

เรียก q ว่า **ผลหาร** (quotient) r ว่า **เศษเหลือ** (remainder) และ b ว่า **ตัวหาร** (divisor)

วิธีเขียน ความสัมพันธ์ระหว่างตัวตั้งและตัวหาร พร้อมทั้ง **ผลหาร** และ**เศษที่เหลือ** จากการหาร โดยเน้นที่

1. **เศษที่เหลือ** จากการหารต้องเป็น “บวก” หรือ “ศูนย์” เท่านั้น
2. **เศษที่เหลือ** ต้องมีค่าไม่เกินตัวหาร(ตัวหารเป็นบวก)
3. **ผลหาร** อาจเป็น “บวก” หรือ “ลบ” หรือ “ศูนย์” ก็ได้

ตัวอย่างเช่น

$$25 = 4(6) + 1$$

$$42 = 6(7) + 0$$

$$-33 = 4(-9) + 3$$

ตัวอย่างที่ 1. ในตารางต่อไปนี้ จะแสดงผลหาร (q) และเศษ (r) จากการหารจำนวนเต็ม a ด้วยจำนวนเต็ม b

a	b	q (ผลหาร)	bq	r (เศษ)	$a = bq + r$
98	7	14	98	0	$98 = 7 \cdot 14 + 0$
87	5	17	85	2	$87 = 5 \cdot 17 + 2$
-79	6	-14	-84	5	$-79 = 6(-14) + 5$
45	-2	-22	44	1	$45 = (-2)(-22) + 1$
-90	-4	23	-92	2	$-90 = (-4)(23) + 2$
25	4	6	24	1	$25 = (4)(6) + 1$
-32	5	-7	-35	3	$-32 = (5)(-7) + 3$
43	-6	-7	42	1	$43 = (-6)(-7) + 1$
-35	-8	5	-40	5	$-35 = (-8)(5) + 5$
-1	4	-1	-4	3	$-1 = (4)(-1) + 3$

ตัวอย่างที่ 2. จงหาผลหารและเศษของ 101 หารด้วย 11

วิธีทำ จาก $a = bq + r$ จะได้ว่า $101 = 11 \cdot 9 + 2$
 ดังนั้น ผลหารคือ 9 และเศษคือ 2

ตัวอย่างที่ 3. จงหาผลหารและเศษของ -11 หารด้วย 3

วิธีทำ จาก $a = bq + r$ จะได้ว่า $-11 = 3(-4) + 1$
 ดังนั้น ผลหารคือ -4 และเศษคือ 1

ตัวอย่างที่ 4. จงหาผลหารและเศษเหลือจากการหารจำนวนข้างหน้าด้วยจำนวนข้างหลังในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. 8,7 2. -42,6 3. -52,11
4. 130,15 5. 100,17 6. 234,20

วิธีทำ

1. $8 = 7(1) + 1$ ผลหาร 1 เศษ 1
2. $-42 = 6(-7) + 0$ ผลหาร -7 เศษ 0
3. $-52 = 11(-5) + 3$ ผลหาร -5 เศษ 3
4. $130 = 15(8) + 10$ ผลหาร 8 เศษ 10
5. $100 = 17(5) + 15$ ผลหาร 5 เศษ 15
6. $234 = 20(11) + 14$ ผลหาร 11 เศษ 14

ตัวอย่างที่ 5. ให้ p, q และ r เป็นจำนวนเฉพาะที่เป็นบวกและมีค่าน้อยกว่า 50 จะมี p, q, r ที่ทำให้ $p + q = r$ และ $p < q$

1. 3 ชุด

2. 6 ชุด

3. 9 ชุด

4. 12 ชุด

วิธีทำ จำนวนเฉพาะที่เป็นบวกและมีค่าน้อยกว่า 50 ได้แก่

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 และ 47

ชุดที่	p	q	r	p + q = r
1	2	3	5	2 + 3 = 5
2	2	5	7	2 + 5 = 7
3	2	11	13	2 + 11 = 13
4	2	17	19	2 + 17 = 19
5	2	29	31	2 + 29 = 31
6	2	41	43	2 + 41 = 43

ตัวอย่างที่ 6. จงหาจำนวนเต็มบวก x เมื่อหารด้วย 4 แล้วเหลือเศษเป็น 2 จงหาเศษเหลือเมื่อ

1. หาร $3x$ ด้วย 4

2. หาร $5x$ ด้วย 4

3. หาร $7x$ ด้วย 4

4. หาร $2x$ ด้วย 4

5. หาร $6x$ ด้วย 4

1. เพราะว่า

$$x = 4q + 2$$

คูณ 3 ตลอด

$$3x = 4(3q) + 6$$

$$3x = 4(3q) + 4 + 2$$

$$3x = 4[(3q) + 1] + 2$$

เศษเหลือ คือ 2

2. เพราะว่า

$$x = 4q + 2$$

คูณ 5 ตลอด

$$5x = 4(5q) + 10$$

$$5x = 4(5q) + 8 + 2$$

$$5x = 4[(5q) + 2] + 2$$

เศษเหลือ คือ 2

3. เพราะว่า

$$x = 4q + 2$$

คูณ 7 ตลอด

$$7x = 4(7q) + 14$$

$$7x = 4(7q) + 12 + 2$$

$$7x = 4[(7q) + 3] + 2$$

เศษเหลือ คือ 2

4. เพราะว่า $x = 4q + 2$ คูณ 2 ตลอด

$$2x = 4(2q) + 4$$

$$2x = 4(2q) + 4$$

$$2x = 4[(2q) + 1] + \underline{0} \quad \text{เศษเหลือ คือ 0}$$

5. เพราะว่า $x = 4q + 2$ คูณ 6 ตลอด

$$6x = 46(2q) + 12$$

$$6x = 4(6q) + 12$$

$$6x = 4[(6q) + 3] + \underline{0} \quad \text{เศษเหลือ คือ 0}$$

ตัวอย่างที่ 7. เมื่อหารจำนวนเต็มบวก x ด้วย 5 มีเศษเหลือเป็น 2 จงหาเศษเหลือเมื่อหาร $4x$ ด้วย 5

วิธีทำ เมื่อหารจำนวนเต็มบวก x ด้วย 5 มีเศษเหลือเป็น 2 สามารถเขียน x ได้ในรูป

จากโจทย์ จะได้ $x = 5k + 2$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม

$$\therefore 4x = 20k + 8 \quad \text{เมื่อ } k \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

$$= 5(4k) + 5 + 3$$

$$= 5(4k + 1) + 3 \quad \text{เนื่องจาก } 4k + 1 \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

ดังนั้น เมื่อหาร $4x$ ด้วย 5 มีเศษเหลือเป็น 3

ตัวอย่างที่ 8. จงหาจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่หาร 415 และ 390 แล้วมีเศษเหลือเท่ากัน

วิธีทำ

ให้ x เป็นจำนวนเต็มบวกที่หาร 415 และ 390 มีเศษเหลือเป็น r

ดังนั้น

$$415 = xk + r \quad \text{เมื่อ } k \text{ เป็นจำนวนเต็ม} \dots\dots(1)$$

$$390 = xm + r \quad \text{เมื่อ } m \text{ เป็นจำนวนเต็ม} \dots\dots(2)$$

$$(1) - (2); \text{ จะได้ } 25 = x(k - m) \dots\dots(3)$$

เนื่องจาก $k - m$ เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $x | 25$

นั่นคือ ค่า x ที่เป็นไปได้ ได้แก่ 1, 5, 25

ดังนั้น จำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่ต้องการ คือ 1, 5, 25

$$\text{คิดลัด } a | (415 - 390)$$

$$a | 25$$

$$\therefore a \text{ คือ } 1, 5, 25$$

ตัวอย่างที่ 9. จงหาจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่หาร 16 และ 21 แล้วมีเศษเหลือเท่ากัน

$$\text{คิดลด } a | (21-16)$$

$$a | 5$$

$$\therefore a \text{ คือ } 1, 5$$

ตัวอย่างที่ 10. จงหาจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่หาร 301 และ 291 แล้วมีเศษเหลือเท่ากัน

$$\text{คิดลด } a | (301-291)$$

$$a | 10$$

$$\therefore a \text{ คือ } 1, 2, 5, 10$$

ตัวอย่างที่ 11. จงหาจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่หาร 372 และ 400 แล้วมีเศษเหลือเท่ากัน

$$\text{คิดลด } a | (400-372)$$

$$a | 28$$

$$\therefore a \text{ คือ } 1, 2, 4, 7, 14, 28$$

ตัวอย่างที่ 12. จงหาจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่หาร 491 และ 519 แล้วมีเศษเหลือเท่ากัน

$$\text{คิดลด } a | (519-491)$$

$$a | 28$$

$$\therefore a \text{ คือ } 1, 2, 4, 7, 14, 28$$

ตัวอย่างที่ 13. ถ้า m หารด้วย 10 เหลือเศษ 5 และ n หารด้วย 10 เหลือเศษ 2 แล้ว $3m - 2n$

หารด้วย 5 เหลือเศษเท่าไร

วิธีทำ ให้ ผลลัพธ์ที่ได้จากการหาร m ด้วย 10 เป็น a

ผลลัพธ์ที่ได้จากการหาร n ด้วย 10 เป็น b

$$\text{จากโจทย์จะได้ } m = 10a + 5$$

$$3m = 30a + 15 \dots\dots(1)$$

$$\text{และ } n = 10b + 2$$

$$2n = 20b + 4 \dots\dots(2)$$

$$(1) - (2) \quad 3m - 2n = 30a - 20b + 11$$

$$= 30a - 20b + 10 + 1$$

$$= 5(6a - 4b + 2) + 1$$

ดังนั้น $3m - 2n$ หารด้วย 5 จะเหลือเศษ 1

นิยาม จำนวนเต็ม a เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม k ที่ $a = 2k$

จำนวนเต็ม a เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม k ที่ $a = 2k + 1$

เช่น 6 เป็นจำนวนคู่ เพราะ $6 = 2(3)$: 9 เป็นจำนวนคี่ เพราะ $9 = 2(4) + 1$

ตัวอย่าง จงแสดงว่า “ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว a^2 เป็นจำนวนคู่

วิธีทำ

ให้ $a = 2k$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม

$$\text{จะได้ } a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$

แต่เนื่องจาก k เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น k^2 เป็นจำนวนเต็ม

$\therefore 2k^2$ เป็นจำนวนเต็มคู่ นั่นคือ a^2 เป็นจำนวนเต็มคู่

ทฤษฎี

จำนวนเต็มบวกใด ๆ “ผลคูณของจำนวนเต็มที่เรียงกัน n ตัว จะหารลงตัวด้วย n เสมอ

$$n \mid a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1) \quad \text{เมื่อ } a \in \mathbb{I}; n \in \mathbb{I}^+$$

สรุป

$$(1) \quad 1 \mid n$$

$$(2) \quad 2 \mid n(n+1)$$

$$(3) \quad 3 \mid n(n+1)(n+2)$$

$$(4) \quad 4 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มใดๆ พิจารณาข้อความต่อไปนี้ หารลงตัวหรือไม่

$$1. \quad 3 \mid (a^4 + 2a^3 - a^2 - 2a)$$

ตอบ หารลงตัวเพราะสามารถแยกตัวประกอบของตัวตั้งได้เป็นจำนวนเรียงกันมากกว่า

หรือ เท่ากับ 3 จำนวนเรียงกัน

$$2. \quad 4 \mid (a^2 + 2)$$

ตอบ หารไม่ลงตัวเพราะไม่สามารถแยกตัวประกอบของตัวตั้งได้เป็นจำนวนเรียงกันมากกว่า

หรือ เท่ากับ 4 จำนวนเรียงกัน

3. $2|(a^2 + a)$

ตอบ หารลงตัวเพราะสามารถแยกตัวประกอบของตัวตั้งได้เป็นจำนวนเรียงกันมากกว่า
หรือ เท่ากับ 2 จำนวนเรียงกัน

4. $4|(a^2 - 1)$

ตอบ หารไม่ลงตัวเพราะไม่สามารถแยกตัวประกอบของตัวตั้งได้เป็นจำนวนเรียงกันมากกว่า
หรือ เท่ากับ 4 จำนวนเรียงกัน

5. $3|a(a+1)(a+2)$

ตอบ หารลงตัวเพราะสามารถแยกตัวประกอบของตัวตั้งได้เป็นจำนวนเรียงกันมากกว่า
หรือ เท่ากับ 3 จำนวนเรียงกัน

6. $3|(a+5)(a+6)(a+7)(a+8)$

ตอบ หารลงตัวเพราะสามารถแยกตัวประกอบของตัวตั้งได้เป็นจำนวนเรียงกันมากกว่า
หรือ เท่ากับ 3 จำนวนเรียงกัน

7. $2|(a+2)(a+3)$

ตอบ หารลงตัวเพราะสามารถแยกตัวประกอบของตัวตั้งได้เป็นจำนวนเรียงกันมากกว่า
หรือ เท่ากับ 2 จำนวนเรียงกัน

8. $3|(a-1)a(a+1)$

ตอบ หารลงตัวเพราะสามารถแยกตัวประกอบของตัวตั้งได้เป็นจำนวนเรียงกันมากกว่า
หรือ เท่ากับ 3 จำนวนเรียงกัน

ทฤษฎีบท 6 ให้ b เป็นจำนวนเต็มที่มีค่ามากกว่า 1 จำนวนเต็มบวก n ใด ๆ สามารถ

เขียนในรูปการกระจายฐาน b ได้เป็น

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_1 b + a_0$$

เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม และ $a_k, a_{k-1}, \dots, a_0, a_1$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและน้อยกว่า b และ $a_k \neq 0$

ตัวอย่างที่ 1. จงเขียน 123 ในรูปการกระจายฐาน 9

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad 123 &= (9 \times 13) + 6 \\ &= (9 \times (9 + 4)) + 6 \\ &= (9 \times 9) + (9 \times 4) + 6\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } 123 = (1 \times 9^2) + (4 \times 9) + 6$$

ตัวอย่างที่ 2. จงเขียน 1,235 ในรูปตัวเลขฐาน 4

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad 1,235 &= 4(308) + 3 \\ 308 &= 4(77) + 0 \\ 77 &= 4(19) + 1 \\ 19 &= 4(4) + 3 \\ 4 &= 4(1) + 0 \\ 4 &= 4(0) + 1\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } 1,235 = (103103)_4$$

ตัวอย่างที่ 3. จงเปลี่ยน 12345_{10} ให้เป็นตัวเลขฐาน 8

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad 12345 &= 8(1543) + 1 \\ 1543 &= 8(192) + 7 \\ 195 &= 8(24) + 0 \\ 24 &= 8(3) + 0 \\ 3 &= 8(0) + 3 \\ \therefore (12345)_{10} &= (30071)_8\end{aligned}$$

3.3 ตัวหารร่วมมาก (The Greatest Common Divisor)

บทนิยาม กำหนด a และ b เป็นจำนวนเต็ม เรียกจำนวนเต็ม c ที่สามารถหารทั้ง a และ b ลงตัวว่าเป็น **ตัวหารร่วม** ของ a และ b

บทนิยาม ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ a และ b ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน จำนวนเต็มบวก d ที่มีค่ามากที่สุด ซึ่ง $d|a$ และ $d|b$ เรียกว่าเป็น **ตัวหารร่วมมาก** (ห.ร.ม.) ของ a และ b ใช้สัญลักษณ์ (a, b) แทน ห.ร.ม. ของ a และ b

กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มอย่างน้อยหนึ่งตัวต้องไม่เป็น 0 ($a \neq 0$ หรือ $b \neq 0$) จำนวนเต็มบวก d จะเป็นตัวหารร่วมมาก (ห.ร.ม.) ของ a และ b ก็ต่อเมื่อ

1. $d|a$ และ $d|b$
 2. ถ้า c เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $c|a$ และ $c|b$ แล้ว $c|d$
- ** เขียนแทน ห.ร.ม. ของ a และ b ด้วย $d = (a, b)$**

คุณสมบัติของ ห.ร.ม.

กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $a \neq 0$ หรือ $b \neq 0$

1. $(a, b) \geq 1$ เสมอ
2. $(a, b) = (b, a)$
3. $(a, b) = (a, -b) = (-a, b) = (|a|, |b|)$
4. ถ้า m เป็นจำนวนเต็มบวกแล้วจะได้ว่า $(ma, mb) = m(a, b)$
5. ถ้า $(a, b) = d$ แล้ว $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$
6. $((a, b), c) = (a, (b, c)) = (a, b, c)$
7. ถ้า $d = (a, b)$ แล้วจะมีจำนวนเต็ม m และ n ที่ทำให้ $d = am + bn$ ซึ่ง m และ n มีได้หลายชุด (สามารถเขียนได้ในรูปของผลรวมเชิงเส้น นั่นเอง)

เช่น $8 = (88, 64)$ $\therefore$ ผลรวมเชิงเส้นของ 88 และ 64 คือ $8 = (88)(3) + (64)(-4)$

เราสามารถเขียนในรูปผลรวมเชิงเส้นของ a และ b ได้ดังนี้

$$1 = ax + by$$

วิธีหาตัวหารร่วมมาก มีหลายวิธี

1. วิธีหาตัวประกอบ

ตัวอย่างที่ 1. จงหา ห.ร.ม. ของ 12, 18 และ 30

วิธีทำ ตัวประกอบของ 12 คือ 1, 2, 3, 4, 6, 12

ตัวประกอบของ 18 คือ 1, 2, 3, 6, 9, 18

ตัวประกอบของ 30 คือ 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

ตัวประกอบร่วมของ 12, 18 และ 30 คือ 1, 2, 3, 6

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 12, 18 และ 30 คือ 6

ตัวอย่างที่ 2. จงหา ห.ร.ม. ของ 10 และ 12

วิธีทำ จำนวนนับที่หาร 10 ลงตัว คือ 1, 2, 5, 10

จำนวนนับที่หาร 12 ลงตัว คือ 1, 2, 3, 4, 6, 12

จำนวนนับที่หาร 10 และ 12 ลงตัว คือ 1 และ 2

จำนวนนับที่มากที่สุดที่หาร 10 และ 12 ลงตัว คือ 2

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 10 และ 12 คือ 2

ตัวอย่างที่ 3. จงหา ห.ร.ม. ของ 8, 24 และ 40

วิธีทำ จำนวนนับที่หาร 8 ลงตัว คือ 1, 2, 4, 8

จำนวนนับที่หาร 24 ลงตัว คือ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

จำนวนนับที่หาร 40 ลงตัว คือ 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40

จำนวนนับที่หาร 8, 24 และ 40 ลงตัว คือ 1, 2, 4, 8

จำนวนนับที่มากที่สุดที่หาร 8, 24 และ 40 ลงตัว คือ 8

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 8, 24 และ 40 คือ 8

2. วิธีแยกตัวประกอบ

ตัวอย่างที่ 4. จงหา ห.ร.ม. ของ 18 และ 40 โดยวิธีแยกตัวประกอบ

วิธีทำ $18 = 2 \times 3 \times 3$

$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$

จะได้ว่า 2 เป็นตัวประกอบร่วมที่มากที่สุด

ตอบ ห.ร.ม. ของ 18 และ 40 คือ 2

ตัวอย่างที่ 5. จงหา ห.ร.ม. ของ 42, 60 และ 90 โดยวิธีแยกตัวประกอบ

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 42 &= 2 \times 3 \times 7 \\ 60 &= 2 \times 2 \times 3 \times 5 \\ 90 &= 2 \times 3 \times 3 \times 5 \end{aligned}$$

จะได้ $2 \times 3 = 6$ เป็นตัวประกอบร่วมที่มากที่สุด

ตอบ ห.ร.ม. ของ 42, 60 และ 90 คือ 6

3. วิธีหารสั้น

ตัวอย่างที่ 6. จงหา ห.ร.ม. ของ 16, 28 และ 36

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 16 \quad 28 \quad 36} \\ 2 \overline{) 8 \quad 14 \quad 18} \\ \underline{4 \quad 7 \quad 9} \end{array}$$

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 16, 28 และ 36 คือ $2 \times 2 = 4$

ตัวอย่างที่ 7. จงหาจำนวนที่มากที่สุดที่หาร 6, 12 และ 15

วิธีทำ

$$6 = 2 \times 3$$

$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

$$15 = 3 \times 5$$

ดังนั้น 3 คือ จำนวนที่มีค่ามากที่สุดที่หาร 6, 12 และ 15 ลงตัว

ตัวอย่างที่ 8. จงหา ห.ร.ม. ของ 42 และ 36

วิธีทำ

ตัวหารร่วมของ 42 และ 36 ได้แก่ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

จำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุด คือ 6

$$\text{ดังนั้น } (42, 36) = 6$$

หมายเหตุ $(a, b) = (-a, b) = (a, -b) = (-a, -b)$

ตัวอย่างที่ 9. ห.ร.ม. ของ 6, 8 และ 12 ตรงกับข้อใด

1. 2

2. 3

3. 4

4. 6

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 6, 8, 12} \\ \underline{3, 4, 6} \end{array}$$

$\therefore$ ห.ร.ม. คือ 2

ตอบข้อ 1

ตัวอย่างที่ 10. ห.ร.ม. ของ 91 และ 252 คือจำนวนในข้อใด

1. 3 2. 6 3. 7 4. 13

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 91,252} \\ \underline{13,36} \end{array}$$

∴ ห.ร.ม. คือ 7

ตอบข้อ 3

ตัวอย่างที่ 11. จำนวนนับที่มากที่สุดที่หาร 63,72,45 และ 198 ได้ลงตัว

1. 9 2. 13 3. 18 4. 19

วิธีทำ หา ห.ร.ม. จะได้

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 63,72,45,198} \\ 3 \overline{) 21,24,15,66} \\ \underline{7,8,5,22} \end{array}$$

∴ ห.ร.ม. คือ $3 \times 3 = 9$

ตอบข้อ 1

ทฤษฎีบท 7 ขั้นตอนวิธีของยุคลิด

กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ และ $b < a$ จะมีขั้นตอนการหา ห.ร.ม. ดังนี้
โดยใช้ขั้นตอนวิธีการหารไปเรื่อยๆ จะได้ว่า

$$\begin{array}{llll} \text{ขั้นที่ 1} & a & = & bq_1 + r_1 \quad \text{เมื่อ } 0 < r_1 < b \\ & \swarrow & \nwarrow & \\ \text{ขั้นที่ 2} & b & = & r_1q_2 + r_2 \quad \text{เมื่อ } 0 < r_2 < r_1 \\ & \swarrow & \nwarrow & \\ \text{ขั้นที่ 3} & r_1 & = & r_2q_3 + r_3 \quad \text{เมื่อ } 0 < r_3 < r_2 \\ & \swarrow & \nwarrow & \\ \text{ขั้นที่ 4} & r_2 & = & r_3q_4 + r_4 \quad \text{เมื่อ } 0 < r_4 < r_3 \\ & \vdots & & \\ \text{ขั้นที่ } n & r_{n-2} & = & r_{n-1}q_n + r_n \quad \text{เมื่อ } 0 < r_n < r_{n-1} \\ & \swarrow & \nwarrow & \\ \text{ขั้นที่ } n+1 & r_{n-1} & = & r_nq_{n+1} + 0 \end{array}$$

ดังนั้น r_n ซึ่งเป็นตัวสุดท้ายที่ไม่ใช่ศูนย์จะเป็น ห.ร.ม. ของ a และ b

ตัวอย่างที่ 1 จงหา ห.ร.ม. ของ 754 และ 1,976

ขั้นที่ 1 เขียนจำนวนนับที่จะหา ห.ร.ม. เรียงกัน ดังนี้

$$\begin{array}{r|l} 754 & 1976 \end{array}$$

ขั้นที่ 2 นำจำนวนนับที่น้อยกว่าไปหารจำนวนนับที่มากกว่า

(คือนำ 754 ไปหาร 1,976 ได้ 2 เศษ 468)

$$\begin{array}{r|l} 754 & 1976 \\ & \underline{1508} \\ & 468 \end{array}$$

ขั้นที่ 3 นำเศษที่ได้จากขั้นที่ 2 (468) ไปหารจำนวนนับตัวแรก (754) ได้ 1 เศษ 286

$$\begin{array}{r|l} 1 & 754 & 1976 & 2 \\ & \underline{468} & \underline{1508} & \\ & 286 & 468 & \end{array}$$

ขั้นที่ 4 นำเศษที่ได้จากขั้นที่ 3 (286) ไปหารจำนวนทางขวามือ (468) และทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนหารไม่ลงตัวหรือเศษเป็น 0

$$\begin{array}{r|l} 1 & 754 & 1976 & 2 \\ & \underline{468} & \underline{1908} & \\ 1 & 286 & 468 & 1 \\ & \underline{182} & \underline{286} & \\ 1 & 104 & 182 & 1 \\ & \underline{78} & \underline{104} & \\ & 26 & 78 & 3 \\ & & \underline{78} & \end{array}$$

0

ห.ร.ม. ในที่นี้คือ 26

สรุปหลักการ

1. เมื่อเศษเป็นศูนย์ แสดงว่าการหารจบสิ้นแล้ว
2. หารกลับไปกลับมาทางขวาและทางซ้าย โดยนำตัวเลขไปหารต่อไป ตัวหารตัวสุดท้าย

ข้อควรสังเกต การหา ห.ร.ม. โดยวิธีนี้จะใช้เมื่อจำนวนนับนั้นมีค่ามากๆ โดยนำมาตั้งทีละสองจำนวน ตั้งคู่กันไป นำจำนวนน้อยหารจำนวนมาก เมื่อลบกันแล้วนำผลลบไปหารอีกจำนวนหนึ่ง สลับกันไปจนกว่าจะหารได้ลงตัว เหลือเศษศูนย์ จำนวนที่เป็นตัวหารได้ลงตัว จำนวนสุดท้ายคือ ห.ร.ม

ตัวอย่างที่ 2. จงหา ห.ร.ม. โดยขั้นตอนวิธีแบบยุคลิดในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) 752, 1334	លេខ	1	752	1334	1
			582	752	
		2	170	582	3
			144	510	
			26	72	2
		1	20	52	
		3	6	20	3
			6	18	
					<u>2</u>

พ.ร.ม. ของ 752, 1334 คือ 2

$$\begin{array}{r} \text{2) } 629, 925 \\ \underline{629} \\ 592 \\ \underline{592} \\ 37 \\ \underline{37} \\ 296 \\ \underline{296} \\ 0 \end{array}$$

ห.ร.ม. ของ 629, 925 คือ 37

3) 444, 777

เจดีย์	1	444	777	1
		333	444	
		<u>111</u>	333	3
			333	

ห.ร.ม. ของ 444, 777 คือ 111

4) 833, 1225

เจดีย์	2	833	1225	1
		784	833	
		<u>49</u>	392	8
			392	

ห.ร.ม. ของ 833, 1225 คือ 49

5) 997, 2551

เจดีย์	1	997	2551	2
		557	1994	
	3	440	557	1
		351	440	
	3	89	117	1
		84	89	
	1	5	28	5
		3	25	
	2	2	3	1
		2	2	
		<u>1</u>		

ห.ร.ม. ของ 997, 2551 คือ 1

ตัวอย่างที่ 3. จงหา ห.ร.ม. ของ 3,348 และ 2,592 โดยใช้ขั้นตอนวิธีของยุคลิด

วิธีทำ $3,348 = 1(2,592) + 756$ (นำ 2,592 หาร 3,348 ได้ 1 เศษ 756)

$$2,592 = 3(756) + 324$$

$$756 = 2(324) + 108$$

$$324 = 3(108) + 0$$

$$\text{ดังนั้น } (3348, 2592) = 108$$

ตัวอย่างที่ 4. จงหา ห.ร.ม. (414,662) โดยใช้ขั้นตอนวิธีของยุคลิด

วิธีทำ $662 = 414(1) + 248$

$$414 = 248(1) + 166$$

$$248 = 166(1) + 82$$

$$166 = 82(2) + 2$$

$$82 = 2(41) + 0$$

$$\text{ห.ร.ม. } (414, 662) = 2$$

ตัวอย่างที่ 5. จงหา ห.ร.ม. ของ และ ต่อไปนี้โดยใช้วิธีขั้นตอนวิธีของยุคลิด

1. $a = 1320, b = 342$

2. $a = 2244, b = 418$

3. $a = 4126, b = 179$

4. $a = 4652, b = 232$

5. $a = 7286, b = 1684$

1. $a = 1320, b = 342$

วิธีทำ $1320 = 342(3) + 294$

$$342 = 294(1) + 48$$

$$294 = 48(6) + 6$$

$$48 = 6(8) + 0$$

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 1320 และ 342 คือ 6

2. $a = 2244, b = 418$

วิธีทำ $2244 = 418(5) + 154$

$$418 = 154(2) + 110$$

$$154 = 110(1) + 44$$

$$110 = 44(2) + 22$$

$$44 = 22(2) + 0$$

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 2244 และ 418 คือ 22

3. $a = 4126, b = 179$

วิธีทำ $4126 = 179(23) + 9$

$$197 = 9(19) + 8$$

$$9 = 8(1) + 1$$

$$8 = 1(8) + 0$$

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 4126 และ 179 คือ 1

4. $a = 4652, b = 232$

วิธีทำ $4652 = 232(20) + 12$

$$232 = 12(19) + 4$$

$$12 = 4(3) + 0$$

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 4652 และ 232 คือ 4

5. $a = 7286, b = 1684$

วิธีทำ $7286 = 1684(4) + 550$

$$1684 = 550(3) + 34$$

$$550 = 34(16) + 6$$

$$34 = 6(5) + 4$$

$$6 = 4(1) + 2$$

$$4 = 2(2) + 0$$

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 7286 และ 1684 คือ 2

ตัวอย่างที่ 6. จงหา $(-24, 56)$ โดยใช้ขั้นตอนวิธีของยุคลิด

วิธีทำ ในที่นี้จะหา $(24, 56)$ โดยใช้ขั้นตอนยุคลิด ดังนี้

$$56 = 24(2) + 8$$

$$24 = 8(3) + 0$$

แสดงว่า $(24, 56) = 8$

ดังนั้น $(-24, 56) = 8$

ขั้นตอนการหารแต่ละขั้นตอน อาจจะเขียนในรูปตารางการหาร เพื่อความชัดเจนได้ดังนี้

2	56	24	3
	48	24	
	8		

ตัวอย่างที่ 7. (1) จงหา (56,72)

(2) จงหาจำนวน m และ n ซึ่ง $(56, 72) = 56m + 72n$

วิธีทำ (1) โดยใช้ขั้นตอนวิธีของยุคลิด จะได้ว่า

$$72 = 56(1) + 16 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$56 = 16(3) + 8 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$16 = 8(2)$$

$$\text{ดังนั้น } (56,72) = 8$$

(2) โดยการย้อนกลับ

$$8 = 56 - 16(3) \quad \quad \quad : \text{ จาก (2)}$$

$$= 56 - [72 - 56(1)]3 \quad \quad \quad : \text{ จาก (1)}$$

$$= 56 - 72(3) + 56(3)$$

$$= 56(4) - 72(3)$$

$$= 56(4) + 72(-3)$$

แสดงว่า $m = 4$ และ $n = -3$

ตัวอย่างที่ 8. (1) จงหา (30,42)

(2) จงหาจำนวน m และ n ซึ่ง $(30, 42) = 30m + 42n$

วิธีทำ (1) โดยใช้ขั้นตอนวิธีของยุคลิด จะได้ว่า

$$42 = 30(1) + 12 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$30 = 12(2) + 6 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$12 = 6(2)$$

$$\text{ดังนั้น } (30,42) = 6$$

(2) โดยการย้อนกลับ

$$6 = 30 - 12(2) \quad \quad \quad : \text{ จาก (2)}$$

$$= 30 - [42 - 30(1)](2) \quad \quad \quad : \text{ จาก (1)}$$

$$= 30 - 42(2) + 30(2)$$

$$= 30(3) - 42(2)$$

$$= 30(3) + 42(-2)$$

แสดงว่า $m = 3$ และ $n = -2$

ตัวอย่างที่ 9. (1) จงหา (147,56)

วิธีทำ (1) โดยใช้ขั้นตอนวิธีของยุคลิด จะได้ว่า

$$147 = 56(2) + 35 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$56 = 35(1) + 21 \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$35 = 21(1) + 14 \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$21 = 14(1) + 7 \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$14 = 7(2)$$

ดังนั้น $(147,56) = 7$

(2) จงหาจำนวน m และ n ซึ่ง $(147, 56) = 147m + 56n$

โดยการย้อนกลับ

$$7 = 21 - 14(1) \quad : \text{จาก (4)}$$

$$= 21 - [35 - 21] \quad : \text{จาก (3)}$$

$$= [56 - 35] - [35 - (56 - 35)] \quad : \text{จาก (2)}$$

$$= 56 - 35 - [35 - 56 + 35]$$

$$= 56 - 35 - 35 + 56 - 35$$

$$= (2)(56) - (3)(35)$$

$$= (2)(56) - (3)[147 - (2)(56)] \quad ; \text{จาก (1)}$$

$$= (2)(56) - (3)(147) + (6)(56)$$

$$= (8)(56) - (3)(147)$$

$$= (56)(8) + (147)(-3)$$

แสดงว่า $m = 8$ และ $n = -3$

ตัวอย่างที่ 10. จงหา (56, 72) แล้วจงหาจำนวนเต็ม m, n ซึ่ง $(56, 72) = 56m + 72n$

วิธีทำ $72 = 56(1) + 16$

$$56 = 16(3) + 8$$

$$16 = 8(2)$$

ดังนั้น $(56, 72) = 8$

โดยการย้อนกลับ $8 = 56 - 16(3)$

$$= 56 - [72 - 56(1)]3$$

$$= 56 - 72(3) + 56(3)$$

$$= 56(4) - 72(3)$$

$$= 56(4) + 72(-3)$$

$$\therefore m = 4 \text{ และ } n = -3$$

ตัวอย่างที่ 11. จงเขียน ห.ร.ม. (595, 252) ในรูปของ x (595) + y (252)

วิธีทำ ขั้นแรก หา ห.ร.ม. (595 , 252)

ขั้นสอง หา x และ y ที่ทำให้ $7 = x$ (595) + y (252)

$$595 = 5(252) + 91$$

$$\text{จาก } 7 = 70 - 3(21)$$

$$252 = 2(91) + 70$$

$$= 70 - 3(91 - 70)$$

$$91 = 1(70) + 21$$

$$= 4(70) - 3(91)$$

$$70 = 3(21) + 7$$

$$= 4[252 - 2(91)] - 3(91)$$

$$21 = 3(7) + 0$$

$$= 4(252) - 11(91)$$

$$(595, 252) = 7$$

$$= 4(252) - 11[595 - 2(252)]$$

$$= 26(252) - 11(595)$$

$$\text{จะได้ } x = -11 \text{ และ } y = 26$$

หมายเหตุ เลขชุดดังกล่าวมีได้หลายคู่ อาจหา x, y อื่น ๆ ได้อีก คือ

$$7 = 26(252) - 11(595) + 595(252) - 252(595)$$

$$= (26 + 595)(252) + (-11 - 252)(595)$$

$$= 621(252) + (-263)595 \text{ ก็ได้}$$

บทนิยาม ให้ $a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

เรียกจำนวนเต็มบวก D ที่มากที่สุด ซึ่ง $D|a_1, D|a_2, \dots, D|a_n$

ว่าเป็นตัวหารร่วมมาก (ห.ร.ม.) ของ $a_1, a_2, \dots, a_n$

ใช้สัญลักษณ์ $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ แทน ห.ร.ม. ของ $a_1, a_2, \dots, a_n$

ตัวอย่างที่ 1. จงหา ห.ร.ม. ของ 15, 24 และ 36

วิธีทำ

$$(15, 24, 36) = ((15, 24), 36)$$

$$= (3, 36)$$

$$= 3$$

ตัวอย่างที่ 2. จงหา ห.ร.ม. ของ -504 และ -450

วิธีทำ

$$(-504, -450) = (504, 450)$$

$$504 = 450(1) + 54$$

$$450 = 54(8) + 18$$

$$54 = 18(3) + 0$$

$$\text{ดังนั้น } (-504, -450) = 18$$

ตัวอย่างที่ 3. จงหาจำนวนมากที่สุดที่หาร 23, 29 และ 35 แล้วเหลือเศษ 5 เท่ากัน

$$\text{วิธีทำ } 23 - 5 = 18$$

$$29 - 5 = 24$$

$$35 - 5 = 30$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{)18 \quad 24 \quad 30} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{)9 \quad 12 \quad 15} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{\underline{3 \quad 4 \quad 5}} \end{array}$$

ดังนั้น 6 หรือ (2×3) คือ จำนวนที่มากที่สุดที่หาร 23, 29 และ 35 แล้วเหลือเศษ 5

ตัวอย่างที่ 4. จงหาจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่หาร 323, 227 และ 155 แล้วมีเศษเหลือเท่ากัน

วิธีทำ

ให้ x เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุดที่หาร 323, 227 และ 155

แล้ว มีเศษเหลือเป็น r เท่ากัน

ดังนั้น

$$323 = xk + r \quad \text{เมื่อ } k \text{ เป็นจำนวนเต็ม.....(1)}$$

$$227 = xm + r \quad \text{เมื่อ } m \text{ เป็นจำนวนเต็ม.....(2)}$$

$$155 = xn + r \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม.....(3)}$$

$$(1) - (2) \text{ จะได้ } 96 = x(k - m) \text{(4)}$$

$$(2) - (3) \text{ จะได้ } 72 = x(m - n) \text{(5)}$$

$$(1) - (3) \text{ จะได้ } 168 = x(k - n) \text{(6)}$$

จาก (4), (5) และ (6) จะได้ว่า $x|96$, $x|72$, และ $x|168$

ดังนั้น x เป็นตัวหารร่วมของ 96, 72 และ 168

ซึ่ง ห.ร.ม. ของ 96, 72 และ 168 คือ 24

นั่นคือ จำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่หาร 323, 227 และ 155 แล้วมีเศษเหลือเท่ากัน คือ 24

ซึ่งการตรวจสอบจะได้เศษเหลือที่เท่ากันคือ 11

ตัวอย่างที่ 5. จงหาจำนวนที่มากที่สุด ซึ่งเมื่อหาร 109, 139 และ 189 แล้วเหลือเศษเท่ากันและ
หาว่าเศษเป็นเท่าไร

วิธีทำ สมมติให้เศษที่เท่ากันเป็น X เมื่อหักเศษที่เท่ากันออกจำนวนเหล่านี้ คือ $109 - X$, $139 - X$
และ $189 - X$ จำนวนที่มากที่สุด (คือ ห.ร.ม.) จะต้องหาร $109 - X$, $139 - X$ และ $189 - X$
ได้ลงตัว และจำนวนที่มากที่สุดนี้จะหารผลต่างระหว่างจำนวนเหล่านั้นได้ลงตัว

$$(139 - X) - (109 - X) = 139 - 109$$

$$= 30$$

$$(189 - X) - (139 - X) = 189 - 139$$

$$= 50$$

$$(189 - X) - (109 - X) = 189 - 109$$

$$= 80$$

ดังนั้น จำนวนที่มากที่สุดจะต้องหาร 30, 50 และ 80 ได้ลงตัว

นั่นคือจะต้องหา ห.ร.ม. ของ 30, 50 และ 80

นั่นคือ ห.ร.ม. ของ 30, 50 และ 80 คือ = 10

ตัวอย่างที่ 6. ต้องการจัดส้ม 126 ผล ชมพู่ 90 ผล และมังคุดอีก 72 ผล รวมเป็นกองขาย กองละเท่าๆ
กัน โดยให้มีจำนวนผลไม้ต่อกองมากที่สุดแต่ไม่ปนชนิดกัน จะต้องใส่กองละกี่ผล และได้ทั้งหมดกี่กอง
วิธีทำ

$$2 \overline{)126 \quad 90 \quad 72}$$

$$3 \overline{)63 \quad 45 \quad 36}$$

$$3 \overline{)21 \quad 15 \quad 12}$$

$$\underline{\underline{7 \quad 5 \quad 4}}$$

จะต้องกองผลไม้แต่ละชนิดให้มากที่สุดกองละ $= 2 \times 3 \times 3 = 18$ ผล

ต้องกองส้ม $= 126 \div 18 = 7$ ผล

ต้องกองชมพู่ $= 90 \div 18 = 5$ ผล

ต้องกองมังคุด $= 72 \div 18 = 4$ ผล

ดังนั้น จะกองผลไม้ได้ทั้งหมด $= 7 + 5 + 4 = 16$ กอง

ตัวอย่างที่ 7. มีเชือกอยู่ 3 เส้นยาว 84, 108 และ 156 เมตร ถ้าต้องการแบ่งเป็นเส้นสั้นๆ ให้เท่าๆ กันและยาวที่สุดที่จะยาวได้ จะใช้เชือกสั้นๆ ที่ยาวเท่ากันทั้งหมดกี่เส้น

1. 26

2. 27

3. 28

4. 29

5. ไม่มีข้อถูก

วิธีทำ

$$2 \overline{)84,108,156}$$

$$2 \overline{)42, 54, 78}$$

$$2 \overline{)21, 27, 39}$$

$$\underline{\underline{7, 9, 13}}$$

∴ จำนวนเชือกที่ได้ = $7 + 9 + 13 = 29$ เส้น

ตอบข้อ 4

ตัวอย่างที่ 8. ถ้าเลือกนักเรียนเตรียมทหารมาจาก 4 กองพัน เป็นจำนวนกองพันละ 78, 91, 104 และ 117 นายตามลำดับ เมื่อนำมาจัดเป็นหมู่ หมู่ละเท่ากัน จะได้นักเรียนมากที่สุดหมู่ละกี่นาย

1. 7 นาย

2. 8 นาย

3. 13 นาย

4. 17 นาย

วิธีทำ หา ห.ร.ม. ของ 78, 91, 104 และ 117 จะได้

$$13 \overline{)78,91,104,117}$$

$$\underline{\underline{6, 7, 8, 9}}$$

ห.ร.ม. คือ 13 ∴ จัดได้มากที่สุดหมู่ละ 13 นาย

ตอบข้อ 3

ตัวอย่างที่ 9. จัดทหารสามหน่วยซึ่งแต่ละหน่วยมีทหาร 198 คน 216 คน และ 162 คน ให้เข้าแถวใหม่ โดยให้มีจำนวนแต่ละแถวเท่ากัน และมีจำนวนมากที่สุด โดยไม่ให้มีทหารเหลือเลย จะต้องให้เข้าแถวๆ ละกี่คน

1. 15 คน

2. 16 คน

3. 18 คน

4. 12 คน

วิธีทำ หา ห.ร.ม. จะได้

$$2 \overline{)198,216,162}$$

$$9 \overline{)99,108,81}$$

$$\underline{\underline{11, 12, 9}}$$

∴ ห.ร.ม. = 18

∴ จะต้องให้เข้าแถวๆ ละ 18 คน

ตอบข้อ 3

ตัวอย่างที่ 10. มีเชือกอยู่ 3 ขด ซึ่งแต่ละขดยาว 35, 49 และ 56 เมตรตามลำดับ ถ้าจะแบ่งให้เป็นเชือกสั้นๆ ที่ยาวเท่าๆ กันแล้ว จะแบ่งได้อย่างน้อยกี่เส้น

1. 12 เส้น 2. 15 เส้น 3. 18 เส้น 4. 20 เส้น

วิธีทำ
$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 35, 49, 56} \\ \underline{5, 7, 8} \end{array}$$
 $\therefore$ จำนวนเส้นที่แบ่งได้ = $5 + 7 + 8 = 20$ เส้น

ตอบข้อ 4

ตัวอย่างที่ 11. มีเชือกอยู่ 3 ขด ซึ่งแต่ละขดยาว 30, 36 และ 42 เมตรตามลำดับ ถ้าจะแบ่งให้เป็นเชือกสั้นๆ ที่ยาวเท่าๆ กันแล้ว จะแบ่งได้อย่างน้อยกี่เส้น

1. 12 เส้น 2. 15 เส้น 3. 18 เส้น 4. 20 เส้น

วิธีทำ
$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 30, 36, 42} \\ 3 \overline{) 15, 18, 21} \\ \underline{5, 6, 7} \end{array}$$
 $\therefore$ จำนวนเส้นที่แบ่งได้ = $5 + 6 + 7 = 18$ เส้น

ตอบข้อ 3

ตัวอย่างที่ 12. มีเชือกอยู่ 5 เส้น แต่ละเส้นยาว 26, 65, 104, 52, 221 เมตรตามลำดับ ถ้าจะแบ่งเป็นเส้นสั้นๆ เท่ากัน แต่ละเส้นจะยาวได้มากที่สุดกี่เมตร

1. 3 เมตร 2. 6 เมตร 3. 13 เมตร 4. 17 เมตร

วิธีทำ
$$\begin{array}{r} 13 \overline{) 26, 65, 104, 52, 221} \\ \underline{2, 5, 8, 4, 17} \end{array}$$
 $\therefore$ ห.ร.ม. คือ 13
ดังนั้น จะได้เส้นละ 13 เมตร

ตอบข้อ 3

ตัวอย่างที่ 13. มะม่วงเขียวเสวย 42 ผล มะม่วงแรด 35 ผล และมะม่วงหนองแซง 56 ผล หากประสงค์จะแบ่งมะม่วงเป็นกองๆ ใส่วะลอม ะลอมละเท่าๆ กัน จะจัดได้รวมทั้งสิ้นกี่ว้ลอมและะลอมละกี่ผล

1. 17 ะลอม ะลอมละ 7 ผล 2. 18 ะลอม ะลอมละ 7 ผล
3. 19 ะลอม ะลอมละ 7 ผล 4. 20 ะลอม ะลอมละ 7 ผล

วิธีทำ
$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 42, 35, 56} \\ \underline{6, 5, 8} \end{array}$$
 จะได้ $6 + 5 + 8 = 19$ ะลอม
ะลอมละ = 7 ผล

ตอบข้อ 3

ตัวอย่างที่ 14. มีเชือกอยู่ 5 เส้น ยาว 40,90,120,180 และ 250 เมตร ถ้าจะแบ่งเป็นเส้นสั้นๆ ให้เท่ากัน และยาวที่สุดเท่าที่จะยาวได้ จะได้เชือกทั้งหมดกี่เส้น

- | | |
|------------|------------|
| 1. 69 เส้น | 2. 68 เส้น |
| 3. 67 เส้น | 4. 66 เส้น |

วิธีทำ

$$\begin{array}{r}
 5 \overline{) 40,90,120,180,250} \\
 2 \overline{) 8,18, 24, 36, 50} \\
 \underline{ 4, 9, 12, 18, 25}
 \end{array}$$

∴ จะได้เชือกทั้งหมด = 4 + 9 + 12 + 18 + 25 = 68 เส้น **ตอบข้อ 2**

ตัวอย่างที่ 15. มีเชือกอยู่ 3 เส้น ยาวเส้นละ 16,24 และ 32 เมตร ตามลำดับ ถ้าจะแบ่งเป็นเส้นให้เท่าๆ กัน และให้ยาวที่สุด โดยไม่ให้เชือกเหลือเศษเลย จะได้เชือกยาวเส้นละกี่เมตร

- | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1. 1 เมตร | 2. 2 เมตร | 3. 4 เมตร | 4. 8 เมตร |
|-----------|-----------|-----------|-----------|

วิธีทำ หา ห.ร.ม. จะได้

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 16,24,32} \\
 2 \overline{) 8, 12,16} \\
 2 \overline{) 4, 6, 8} \\
 \underline{ 2, 3, 4}
 \end{array}$$

ห.ร.ม. คือ $2 \times 2 \times 2 = 8$

∴ จะได้เชือกยาวเส้นละ 8 เมตร

ตอบข้อ 4

ตัวอย่างที่ 16. รถยนต์บรรทุกขนาดเล็ก เฉพาะตัวกระบะกว้าง 1.50 เมตร ยาว 3.50 เมตร สูง 2.50 เมตร ถ้าต้องการบรรทุกกล่องกระดาษรูปสี่เหลี่ยมลูกบาศก์ที่มีขนาดใหญ่ที่สุดให้เต็มตัวกระบะรถพอดี จะบรรทุกได้มากที่สุดกี่ใบ

- | | | | |
|-----------|-----------|----------|----------|
| 1. 105 ใบ | 2. 100 ใบ | 3. 95 ใบ | 4. 90 ใบ |
|-----------|-----------|----------|----------|

วิธีทำ หา ห.ร.ม. ของ 1.50 , 2.50 , 3.50 จะได้ 0.50

∴ กล่อง 1 ใบ มีปริมาตรได้มากที่สุด = $0.50 \times 0.50 \times 0.50 = 0.125$

กระบะมีปริมาตร = $1.50 \times 2.50 \times 3.50 = 13.125$

∴ จำนวนกล่อง = $\frac{\text{ปริมาตรของกระบะ}}{\text{ปริมาตรกล่อง 1 ใบ}} = \frac{13.125}{0.125} = 105 \text{ ใบ}$ **ตอบข้อ 1**

ตัวอย่างที่ 17. เลขจำนวนหนึ่งเมื่อหารด้วย 10 , 12 และ 15 จะหารได้ลงตัว ถ้าผลบวกของผลลัพธ์ของการหารด้วย 3 จำนวนนี้เท่ากับ 1,365 ผลลัพธ์ที่เกิดจากการหารเลขจำนวนนี้ด้วย 10 มีค่าตรงกับข้อใด

1. 324

2. 364

3. 455

4. 546

วิธีทำ ให้เลขจำนวนนั้นเป็น n

และให้ n หารด้วย 10 ผลลัพธ์ = A

n หารด้วย 12 ผลลัพธ์ = B

n หารด้วย 15 ผลลัพธ์ = C

จะได้ $A + B + C = 1,365$

ดังนั้น $\frac{n}{10} + \frac{n}{12} + \frac{n}{15} = 1,365$

$$5n + 6n + 4n = 1,365 \times 60$$

$$n = 5,460$$

ดังนั้น ผลลัพธ์ที่เกิดจากการหารเลขจำนวนนั้นด้วย 10 = $\frac{5460}{10} = 546$

จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

บทนิยาม จำนวนเต็ม a และ b เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ ก็ต่อเมื่อ $(a, b) = 1$

กรณีที่ $(a, b) = 1$ เราเรียก a, b ว่าจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ (Relatively primes)

เช่น $(6, 5) = 1$ เรียก 6, 5 ว่า จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ (เพราะว่า ทั้งสองจำนวนหา ห.ร.ม. ได้เท่ากับ 1)

ตัวอย่าง

5 และ 6 เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ เพราะ $(5, 6) = 1$

7 และ 9 เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ เพราะ $(7, 9) = 1$

2 และ 4 ไม่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

ข้อสังเกต จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ เป็นคนละเรื่องกับ จำนวนเฉพาะนะครับ

ทฤษฎีบท 9 a และ b เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม x และ y

$$\text{ที่ทำให้ } ax + by = 1$$

ตัวอย่าง

7 และ 10 เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์จะได้ว่า $7(3) + 10(-2) = 1$

3 และ 8 เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์จะได้ว่า $3(3) + 8(-1) = 1$

9 และ 16 เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ จะได้ว่า $9(-7) + 16(4) = 1$

ทฤษฎีบท 10 กำหนดจำนวนเต็ม a, b และจำนวนเฉพาะ p

ถ้า $p|ab$ จะได้ $p|a$ หรือ $p|b$

เช่น จำนวนเต็ม $a = 7, b = 4$ และจำนวนเฉพาะ $p = 7$

ซึ่ง $7|(7)(4)$ จะได้ $7|7$ ($p(7)$ ต้องหาร $a(7)$ หรือ $b(4)$ ตัวใดตัวหนึ่งลงตัว)

ทฤษฎีบท ถ้า $d = (m, n)$ และ $m = Md, n = Nd$ จะได้ $1 = (M, N)$

พิสูจน์ จาก $d = (m, n)$ จะได้ $d = mx + ny, \quad x, y \in \mathbb{I}$

จะได้ $d = Mdx + Ndy$

ดังนั้น $1 = Mx + Ny$

$1 = (M, N)$

ตัวอย่างเช่น $2 = (6, 8)$ และ $6 = 3 \cdot 2, \quad 8 = 4 \cdot 2$ จะได้ $1 = (3, 4)$

ตัวอย่างที่ 1. สำหรับจำนวนเต็ม a, b ใด ๆ ให้ $(a, b) = \text{ห.ร.ม.ของ } a \text{ และ } b$

ให้ $A = \{1, 2, 3, \dots, 400\}$ จำนวนสมาชิกของเซต $\{x \in A / (x, 40) = 5\}$ มีค่าเท่าใด

1. 30

2. 40

3. 60

4. 80

วิธีทำ $(x, 40) = 5$ แสดงว่า $40 = 2^3 \times 5$ มี 2 กับ 5 เป็นตัวประกอบ

แสดงว่า $x = \underline{\quad} \times 5$ นั่นคือจำนวนเต็ม x มี 5 เป็นตัวประกอบ

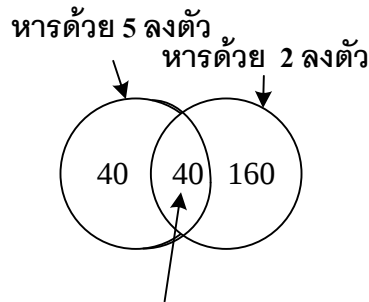
แต่ไม่มี 2 เป็นตัวประกอบ

พุดง่าย ๆ x เป็นจำนวนเต็มที่ 5 หารลงตัวแต่ 2 หารไม่ลงตัวนั่นเอง

$$\text{หารด้วย 5 ลงตัว} = \frac{400}{5} = 80 \quad \text{ไม่ต้องสนใจเศษ}$$

$$\text{หารด้วย 2 ลงตัว} = \frac{400}{2} = 200 \quad \text{ไม่ต้องสนใจเศษ}$$

$$\text{หารด้วย 2 และ 5 ลงตัวคือ 10 หารลงตัวนั่นเอง} = \frac{400}{10} = 40 \quad \text{ไม่ต้องสนใจเศษ}$$



หารด้วย 2 และ 5 ลงตัวคือ 10 หารลงตัว

(หารด้วย 5 ลงตัวแต่หาร 2 ไม่ลงตัว) เท่ากับ (หารด้วย 5 ลงตัว) ลบ (หาร 10 หารลงตัว)

$$= 80 - 40 = 40 \quad \text{จำนวน} \quad \text{ตอบ ข้อ 2}$$

ตัวอย่างที่ 2. กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์คือ $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ } 0 \text{ และ } -100 \leq x \leq 100\}$

ให้ $A = \{x \mid \text{ห.ร.ม. ของ } x \text{ กับ } 21 \text{ เป็น } 3\}$ จำนวนสมาชิกของ A เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 29
2. 34
3. 68
4. 58

วิธีทำ $(x, 21) = 3$ แสดงว่า $21 = 3 \times 7$ มี 3 กับ 7 เป็นตัวประกอบ

แสดงว่า $x = 3 \times \underline{\quad}$ จำนวนเต็ม x มี 3 เป็นตัวประกอบ

แต่ไม่มี 7 เป็นตัวประกอบ

พูดง่ายๆ x เป็นจำนวนเต็มที่มี 3 หารลงตัวแต่ 7 หารไม่ลงตัวนั่นเอง

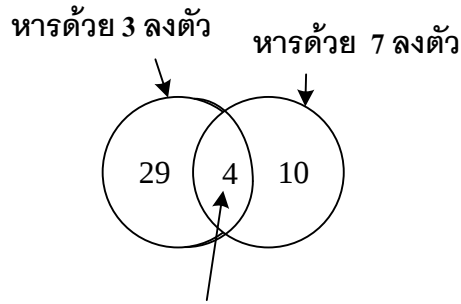
กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์คือ $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ } 0 \text{ และ } -100 \leq x \leq 100\}$

คิดตั้งแต่ 1 ถึง 100 ก่อน

$$\text{หารด้วย 3 ลงตัว} = \frac{100}{3} = 33 \quad \text{ไม่ต้องสนใจเศษ}$$

$$\text{หารด้วย 7 ลงตัว} = \frac{100}{7} = 14 \quad \text{ไม่ต้องสนใจเศษ}$$

$$\text{หารด้วย 3 และ 7 ลงตัวคือ 21 หารลงตัวนั่นเอง} = \frac{100}{21} = 4 \quad \text{ไม่ต้องสนใจเศษ}$$



หารด้วย 3 และ 7 ลงตัวคือ 21 หารลงตัว

(หารด้วย 3 ลงตัวแต่หาร 7 ไม่ลงตัว) เท่ากับ (หารด้วย 3 ลงตัว) ลบ (หาร 21 หารลงตัว)

$$= 33 - 4 = 29 \text{ จำนวน}$$

แต่โจทย์กำหนดจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบจึงได้ $= 29 \times 2 = 58$ **ตอบ** ข้อ 4

ตัวอย่างที่ 3. กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ และ $x = \{x \in U \mid \text{หรม.}(x, 100) = 1\}$

จำนวนสมาชิกในเซต x เท่ากับข้อใด

1. 20 2. 30 3. 40 4. 50

วิธีทำ $(x, 100) = 1$ นั่นคือ x กับ 100 ตัดทอนกันไม่ได้ (เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์)

$$\text{แสดงว่า } 100 = 2^2 \times 5^2$$

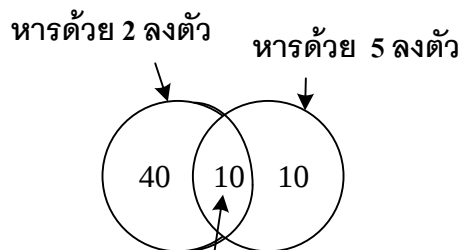
แสดงว่า x ต้องไม่อยู่ในรูปผลคูณของจำนวน 2 และ 5

พูดง่าย ๆ x เป็นจำนวนเต็มที่ 2 หรือ 5 หารไม่ลงตัวนั่นเอง

$$\text{หารด้วย 2 ลงตัว} = \frac{100}{2} = 50$$

$$\text{หารด้วย 5 ลงตัว} = \frac{100}{5} = 20$$

$$\text{หารด้วย 2 และ 5 ลงตัวคือ 10 หารลงตัวนั่นเอง} = \frac{100}{10} = 10$$



หารด้วย 2 และ 5 ลงตัวคือ 10 หารลงตัว

(จำนวนเต็มที่ 2 หรือ 5 หารไม่ลงตัว) เท่ากับ

(จำนวนเต็มทั้งหมดที่กำหนด) ลบ (จำนวนเต็มที่ 2 หรือ 5 หารลงตัว)

$$= 100 - 60 = 40 \text{ จำนวน} \quad \text{ตอบ ข้อ 3}$$

3.4 ตัวคูณร่วมน้อย (The Least Common Multiple)

จำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่หารด้วยจำนวนเต็มสองจำนวนใดๆ ลงตัวเรียกว่า ตัวคูณร่วมน้อยของจำนวนทั้งสอง

บทนิยาม ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์

เรียก จำนวนเต็มบวก c ที่มีค่าน้อยที่สุด ซึ่ง $a|c$ และ $b|c$ ลงตัวว่า

ตัวคูณร่วมน้อย (ค.ร.น.) ของ a และ b

ใช้สัญลักษณ์ $[a, b]$ แทน ค.ร.น. ของ a และ b

หมายเหตุ $[a, b] = [-a, b] = [a, -b] = [-a, -b]$

ตัวอย่างที่ 1. จงหา ค.ร.น. ของ 6, 12, 20 และ 28 โดยวิธีแยกตัวประกอบ

วิธีทำ

$$\begin{array}{lcl} 6 & = & 2 \times 3 \\ 12 & = & 2 \times 2 \times 3 \\ 20 & = & 2 \times 2 \times 5 \\ 28 & = & 2 \times 2 \times 7 \end{array}$$

ดังนั้น ค.ร.น. ของ 6, 12, 20 และ 28 คือ $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา ค.ร.น. ของ 10, 25 และ 30 โดยวิธีแยกตัวประกอบ

วิธีทำ

$$\begin{array}{lcl} 10 & = & 2 \times 5 \\ 25 & = & 5 \times 5 \\ 30 & = & 2 \times 3 \times 5 \end{array}$$

ดังนั้น ค.ร.น. ของ 10, 25 และ 30 คือ $5 \times 2 \times 3 \times 5 = 150$

ตัวอย่างที่ 3. จงหา ค.ร.น. ของ 8 และ 24

วิธีทำ

ตัวคูณร่วมของ 8 ได้แก่ 8, 16, 24, 32, 40, 48, ...

ตัวคูณร่วมของ 24 ได้แก่ 24, 48, 72, ...

ตัวคูณร่วมของ 8 และ 24 ได้แก่ 24, 48, 72, ...

ตัวคูณร่วมน้อยที่สุดของ 8 และ 24 คือ 24

ดังนั้น $[8, 24] = 24$

ตัวอย่างที่ 4. ค.ร.น. ของ 12, 20 และ 30 ตรงกับข้อใด

1. 30 2. 60 3. 90 4. 120

วิธีทำ โดยวิธีหารสั้น

$$2 \overline{) 12, 20, 30}$$

$$\therefore \text{ค.ร.น.} = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 1 \times 1 \times 1 = 60$$

$$2 \overline{) 6, 10, 15}$$

$$3 \overline{) 3, 5, 15}$$

$$5 \overline{) 1, 5, 5}$$

$$\underline{\underline{1, 1, 1}}$$

ตอบข้อ 2

ตัวอย่างที่ 5. ค.ร.น. ของ 12, 15 และ 30 คือจำนวนในข้อใด

1. 30 2. 60 3. 180 4. 360

วิธีทำ โดยวิธีหารสั้น

$$3 \overline{) 12, 15, 30}$$

$$\therefore \text{ค.ร.น. คือ } 3 \times 2 \times 5 \times 2 = 60$$

$$2 \overline{) 4, 5, 10}$$

$$5 \overline{) 2, 5, 5}$$

$$\underline{\underline{2, 1, 1}}$$

ตอบข้อ 2

ตัวอย่างที่ 6. จำนวนในข้อใดเป็นตัวคูณร่วมน้อยของ 8, 12 และ 16

1. 1,536 2. 36 3. 96 4. 48

วิธีทำโดยวิธีหารสั้น

$$2 \overline{) 8, 12, 16}$$

$$2 \overline{) 4, 6, 8}$$

$$\therefore \text{ค.ร.น. คือ } 2 \times 2 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 = 48$$

$$2 \overline{) 2, 3, 4}$$

$$\underline{\underline{1, 3, 2}}$$

ตอบข้อ 4

บทนิยาม ให้ $a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์

จำนวนเต็มบวก C ที่มีค่าน้อยที่สุด ซึ่ง $a_1 | C, a_2 | C, \dots, a_n | C$ เรียก C ว่า

ตัวคูณร่วมน้อย (ค.ร.น.) ของ $a_1, a_2, \dots, a_n$

ใช้สัญลักษณ์ $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ แทน ค.ร.น. ของ $a_1, a_2, \dots, a_n$

ตัวอย่างที่ 1. จงหา ค.ร.น. ของ 5, 12 และ 20

วิธีทำ

$$\begin{aligned}[5, 12, 20] &= [[5, 12], 20] \\ &= [60, 20] \\ &= 60 \\ \text{ดังนั้น } [5, 12, 20] &= 60\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2. จงหา ค.ร.น. ของ -10 และ -12

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\text{เนื่องจาก } [-10, -12] &= [10, 12] \\ [10, 12] &= 60 \\ [-10, -12] &= 60\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3. จงหาจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยที่สุดที่หารด้วย 5, 7 และ 10 แล้วมีเศษเหลือเป็น 2

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\text{เนื่องจาก } [5, 7, 10] &= [[5, 7], 10] \\ &= [35, 10] \\ &= 70\end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่ต้องการ คือ 72

ตัวอย่างที่ 4. ถ้าต้องการแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 6 คน หรือ 8 คน หรือ 10 คน จะต้องมี

นักเรียนอย่างน้อยที่สุดกี่คน จึงจะแบ่งนักเรียนแต่ละกลุ่มได้หมดพอดี

วิธีทำ ต้องการแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 6 คน

หรือ กลุ่มละ 8 คน

หรือ กลุ่มละ 10 คน

ค.ร.น. ของ 6, 8 และ 10 คือ 120

ดังนั้น ต้องมีนักเรียนอย่างน้อยที่สุด 120 คน

ตัวอย่างที่ 5. ถ้าต้องการซื้อแตงโมราคาผลละ 25 บาท หรือซื้อส้มโอราคาผลละ 40 บาท จะต้องจ่ายเงินอย่างน้อยที่สุดเท่าไร จึงจะซื้อผลไม้แต่ละชนิดได้หมดเงินพอดีและซื้อได้อย่างละก็ผล

วิธีทำ แตงโมราคาผลละ 25 บาท

 ส้มโอราคาผลละ 40 บาท

 ค.ร.น. ของ 25 และ 40 คือ 200

ดังนั้น ต้องมีเงินอย่างน้อยที่สุด 200 บาท

 ซื้อแตงโมได้ $200 \div 25 = 8$ ผล

 ซื้อส้มโอได้ $200 \div 40 = 5$ ผล

ตอบ จะต้องมีเงินอย่างน้อย 200 บาท

 ซื้อแตงโมได้ 8 ผล ซื้อส้มโอได้ 5 ผล

ตัวอย่างที่ 6 นาฬิกาปลุก 3 เรือน แต่ละเรือนจะปลุกทุก ๆ 2 ชั่วโมง 3 ชั่วโมง 4 ชั่วโมง ตามลำดับ ถ้านาฬิกาทั้งสามเรือนปลุกพร้อมกันครั้งแรกเมื่อเวลา 06.00 น. ทั้งสามเรือนจะปลุกพร้อมกันครั้งที่สองเมื่อเวลาใด

วิธีทำ นาฬิกาเรือนที่ 1 ปลุกทุก ๆ 2 ชั่วโมง

 นาฬิกาเรือนที่ 2 ปลุกทุก ๆ 3 ชั่วโมง

 นาฬิกาเรือนที่ 3 ปลุกทุก ๆ 4 ชั่วโมง

 ค.ร.น. ของ 2, 3 และ 4 คือ 12

ดังนั้น นาฬิกาทั้งสามเรือนจะปลุกพร้อมกันครั้งที่สองเมื่อเวลาผ่านไป 12 ชั่วโมง

 นาฬิกาทั้งสามเรือน ปลุกครั้งแรกเมื่อเวลา 06.00 น.

 ดังนั้น จะปลุกพร้อมกันครั้งที่สอง เวลา 18.00 น.

ตัวอย่างที่ 7. ในการยิงปืนใหญ่ 3 กระบอก กระบอกแรกจะยิงทุกๆ 20 นาที กระบอกที่สองจะยิงทุกๆ 35 นาที และกระบอกที่สามจะยิงทุกๆ 40 นาที อยากทราบว่าเมื่อยิงปืนทั้งสามกระบอกขึ้นพร้อมกันเวลา 06.00 น. แล้วอีกเมื่อใดปืนทั้งสามกระบอกก็จะถูกยิงขึ้นพร้อมกันอีกครั้ง

1. 10.20 น.

2. 10.40 น.

3. 11.00 น.

4. 11.20 น.

วิธีทำ หา ค.ร.น. ของ 20, 35 และ 40 จะได้

$$5 \overline{) 20, 35, 40}$$

$$2 \overline{) 4, 7, 8}$$

$$2 \overline{) 2, 7, 4}$$

$$\underline{\underline{1, 7, 2}}$$

$$\text{ค.ร.น.} = 5 \times 2 \times 2 \times 1 \times 7 \times 2 = 280$$

∴ อีก 280 นาที หรือ 4 ชั่วโมง 40 นาที ปืนทั้ง 3 กระบอกก็จะยิงพร้อมกัน

นั่นคือ จะยิงพร้อมกันอีกครั้งในเวลา 10.40 น.

ตอบข้อ 2

ตัวอย่างที่ 8. ลูก 3 คนผลัดกันมาเยี่ยมแม่โดยที่คนโต คนกลาง และคนเล็ก มีช่วงห่างในการเยี่ยมดังนี้ 30 วันต่อครั้ง 25 วันต่อครั้ง 20 วันต่อครั้ง ถามว่าเมื่อลูก 3 คนมาเยี่ยมแม่พร้อมกัน แล้วนานกี่วันจึงจะมาเยี่ยมแม่พร้อมกันอีกครั้งหนึ่ง

1. 450 วัน 2. 40 วัน 3. 350 วัน 4. 300 วัน

วิธีทำ หา ค.ร.น. ของ 30, 25 และ 20 จะได้

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 30, 25, 20} \\ 2 \overline{) 6, 5, 4} \\ \underline{3, 5, 2} \end{array}$$

ค.ร.น. คือ $5 \times 2 \times 3 \times 5 \times 2 = 300$

∴ อีก 300 วัน จึงจะมาเยี่ยมแม่พร้อมกันอีกครั้งหนึ่ง

ตอบข้อ 4

ตัวอย่างที่ 9. ระฆัง 3 ใบ ใบที่หนึ่ง 12 นาติติครั้งหนึ่ง ใบที่สอง 15 นาติติครั้งหนึ่ง ใบที่สาม 18 นาติติครั้งหนึ่ง เมื่อระฆังทั้ง 3 ใบ ตีพร้อมกันครั้งหนึ่งแล้วเมื่อเวลา 15 นาฬิกา อยากทราบว่าเวลาเท่าไรระฆังทั้ง 3 ใบจะตีพร้อมกันอีกครั้งหนึ่ง

1. 16 นาฬิกา 2. 16 นาฬิกา 3. 18 นาฬิกา 4. 19 นาฬิกา

วิธีทำ หา ค.ร.น. ของ 12, 15, 18 จะได้

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 12, 15, 18} \\ 2 \overline{) 4, 5, 6} \\ \underline{2, 5, 3} \end{array}$$

ค.ร.น. คือ $3 \times 2 \times 2 \times 5 \times 3 = 180$

ดังนั้น อีก 180 นาที หรือ 3 ชั่วโมง จึงจะตีพร้อมกันอีกครั้ง

∴ จะตีพร้อมกันเวลา 18 นาฬิกา

ตอบข้อ 3

ตัวอย่างที่ 10. เมธา, เล็ก, อ้อม และนุ่นนิ่ม วิ่งรอบสระน้ำที่มีความยาว 400 เมตร ด้วยความเร็ววินาทีละ 15, 12, 10, 8 เมตรตามลำดับ เมื่อออกวิ่งพร้อมกันที่จุดเริ่มต้นเดียวกัน อีกกี่นาทีจึงจะพบกันอีก

1. 120 นาที 2. 60 นาที 3. 4 นาที 4. 2 นาที

วิธีทำ หา ค.ร.น. จะได้

∴ ค.ร.น. คือ $3 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 = 120$

ดังนั้น อีก 120 วินาที หรือ 2 นาที

จึงจะพบกันอีก

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 15, 12, 10, 8} \\ 5 \overline{) 5, 4, 10, 8} \\ 2 \overline{) 1, 4, 2, 8} \\ 2 \overline{) 1, 2, 1, 4} \\ \underline{1, 1, 1, 2} \end{array}$$

ตอบข้อ 4

ตัวอย่างที่ 11. ทหาร 3 นายจุดประทัดสัญญาณทุกๆ 60 นาที, 120 นาที และ 30 นาทีตามลำดับ ถ้าทหารทั้ง 3 นายเริ่มจุดประทัดสัญญาณพร้อมกันเวลา 6.00 น. แล้วจะจุดพร้อมกันอีกครั้งในเวลาใด

1. 7.00 น. 2. 8.00 น. 3. 9.00 น. 4. 10.00 น.

วิธีทำ หา ค.ร.น. ของ 60, 120, 30 ก่อนจะได้

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 60, 120, 30} \\ 3 \overline{) 30, 60, 15} \\ 5 \overline{) 10, 20, 5} \\ 2 \overline{) 2, 4, 1} \\ \underline{\quad 1, 2, 1} \end{array}$$

ค.ร.น. คือ $2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 2 = 120$

∴ อีก 120 นาที หรือ 2 ชั่วโมง จึงจะจุดพร้อมกันอีกครั้ง

แสดงว่าจะจุดพร้อมกันในเวลา 8.00 น.

ตอบข้อ 2

ตัวอย่างที่ 12. หลอดไฟ 5 หลอดซึ่งเป็นไฟกระพริบ ถ้าทั้ง 5 หลอดใช้เวลากระพริบดังนี้ 2,3,4,5,6 วินาที ตามลำดับ เมื่อครั้งแรกกระพริบพร้อมกัน แล้วกระพริบพร้อมกันอีกครั้งนานเท่าไร

1. 1 นาที 2. 2 นาที 3. 3 นาที 4. 4 นาที

วิธีทำ หา ค.ร.น. ของ 2, 3, 4, 5, 6 จะได้ 180

∴ อีก 180 วินาที หรือ 3 นาที จึงจะกระพริบพร้อมกันอีกครั้ง

ตอบข้อ 3

ตัวอย่างที่ 13 . ระฆัง 3 ใบ แต่ละใบจะตีทุก 10, 15 และ 25 นาที จะต้องใช้เวลานานเท่าไรจึงจะตีพร้อมกันอีก

1. 150 นาที 2. 1 ชั่วโมง 3. $2\frac{1}{2}$ ชั่วโมง 4. 5 ชั่วโมง

วิธีทำ หา ค.ร.น. จะได้

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 10, 15, 25} \\ \underline{\quad 2, 3, 5} \end{array}$$

ค.ร.น. คือ $5 \times 2 \times 3 \times 5 = 150$

∴ อีก 150 นาที จึงจะตีพร้อมกันอีกครั้ง

ตอบข้อ 1

ข้อควรสังเกต ในการนำ ค.ร.น. มาแก้โจทย์ปัญหานั้น จะใช้เมื่อต้องการหาจำนวนของสิ่งใดสิ่งหนึ่งให้มีจำนวนน้อยที่สุด โดยเมื่อนำมาแบ่งตามจำนวนที่ต้องการจะแบ่งได้พอดี

ตัวอย่างที่ 14. ก, ข, ค และ ง วิ่งรอบสนามวงกลม ซึ่งมีเส้นรอบวงยาว 240 เมตร ด้วยความเร็ว 15, 10, 12 และ 8 เมตร ต่อวินาที ตามลำดับ เมื่อออกวิ่งพร้อมกัน ณ จุดเริ่มต้นเดียวกัน และไปทางเดียวกัน อยากทราบว่าอีกกี่นาทีเขาจึงจะมาถึงจุดเริ่มต้นพร้อมกันอีกครั้งหนึ่ง

1. 1 นาที 2. 2 นาที 3. 3 นาที 4. 4 นาที

วิธีทำ ก. วิ่งครบ 1 รอบ ใช้เวลา = $\frac{240}{15} = 16$ วินาที
 ข. วิ่งครบ 1 รอบ ใช้เวลา = $\frac{240}{10} = 24$ วินาที
 ค. วิ่งครบ 1 รอบ ใช้เวลา = $\frac{240}{12} = 20$ วินาที หา ค.ร.น.
 ง. วิ่งครบ 1 รอบ ใช้เวลา = $\frac{240}{8} = 30$ วินาที

ค.ร.น. คือ $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 2 = 240$

∴ อีก 240 วินาที หรือ 4 นาที จึงจะมาถึงจุดเริ่มต้นพร้อมกันอีกครั้ง **ตอบข้อ 4**

ตัวอย่างที่ 15. นาฬิกาปลุก 2 เรือนตั้งเวลาปลุกได้เป็นระยะๆ โดยเรือนแรกมีความถี่การปลุกทุก 10 นาที เรือนที่ 2 มีความถี่การปลุกทุก 12 นาที ถ้าขณะนี้เวลา 8.00 น. นาฬิกาทั้งสองเรือนจะปลุกพร้อมกันครั้งแรกเวลาเท่าใด

1. 8.00 น. 2. 9.00 น. 3. 9.30 น. 4. 10.00 น.

วิธีทำ ค.ร.น. ของ 10 และ 12 คือ 120 นาที หรือ 2 ชั่วโมง

∴ นาฬิกาทั้ง 2 เรือน จะปลุกพร้อมกันในเวลา 10.00 น.

ตอบข้อ 4

ตัวอย่างที่ 16. จำนวนนับที่น้อยที่สุดที่เมื่อนำ 6, 8 และ 12 ไปหารแล้วเหลือเศษ 6 เท่ากันทั้งสามจำนวน คือ ข้อใด

1. 30 2. 40 3. 48 4. 60

วิธีทำ กรณี ค.ร.น. ต้องหาค่อน แล้วค่อยนำเศษมาบวก จะได้

$2 \overline{) 6, 8, 12}$
 $2 \overline{) 3, 4, 6}$
 $3 \overline{) 3, 2, 3}$
1, 2, 1

∴ ค.ร.น. คือ $2 \times 2 \times 3 \times 1 \times 2 \times 1 = 24$
 ดังนั้น จำนวนนับดังกล่าว คือ $24 + 6 = 30$

ตอบข้อ 1

ตัวอย่างที่ 17. จำนวนเต็มบวกที่น้อยสุดที่ 48, 96, 16 หารแล้วเหลือเศษ 4 เท่ากันคือข้อใด

1. 96

2. 100

3. 104

4. 112

วิธีทำ หา ค.ร.น. ของ 48, 96, 16 ก่อนจะได้

$$2 \overline{) 48, 96, 16}$$

$$2 \overline{) 24, 48, 8}$$

$$2 \overline{) 12, 24, 4}$$

$$2 \overline{) 6, 12, 2}$$

$$3 \overline{) 3, 6, 1}$$

$$\underline{\underline{1, 2, 1}}$$

$$\text{ค.ร.น.} 7 \text{ คือ } 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 96$$

$$\therefore \text{จำนวนดังกล่าวคือ } 96 + 4 = 100$$

ตอบข้อ 2

ตัวอย่างที่ 18. จงหาเลขที่น้อยที่สุด เมื่อนำ 7, 10, 16 และ 20 ไปหารแล้วเหลือเศษ 5 เสมอ

1. 285

2. 425

3. 565

4. 1125

วิธีทำ เลขจำนวนนั้น = {ค.ร.น. ของ 7, 10, 16, 20} + 5

$$= 560 + 5$$

$$= 565$$

ตอบข้อ 3

ตัวอย่างที่ 19. จำนวนนับที่น้อยที่สุดที่หารด้วย 6, 8 และ 16 แล้วเหลือเศษ 5 คือข้อใด

1. 48

2. 53

3. 96

4. 101

วิธีทำ เลขจำนวนนั้น = {ค.ร.น. ของ 6, 8, 16} + 5

$$= 48 + 5$$

$$= 53$$

ตอบข้อ 2

ตัวอย่างที่ 20. จำนวนที่น้อยที่สุดซึ่งเมื่อเอา 51, 40, 48 และ 60 ไปหารแล้วเหลือเศษ 11 เสมอ จำนวนนั้นคือ

1. 1401

2. 4091

3. 4109

4. 4901

วิธีทำ เลขจำนวนนั้น = {ค.ร.น. ของ 51, 40, 48, 60} + เศษ

$$= 4080 + 11$$

$$= 4091$$

ตอบข้อ 2

ตัวอย่างที่ 21. ถ้า a เป็นเลขจำนวนน้อยที่สุด ซึ่งเมื่อ 6, 7, 8 และ 9 ไปหารจะเหลือเศษ 5 เสมอ แล้วจงหา

$$(a - 497)^2$$

1. 121

2. 144

3. 169

4. 196

วิธีทำ เลขจำนวนนั้น = {ค.ร.น. ของ 6, 7, 8, 9} + เศษ

$$= 504 + 5$$

$$= 509$$

$$\therefore (a - 497)^2 = (509 - 497)^2 = 144$$

ตัวอย่างที่ 22. จงหาจำนวนนับที่น้อยที่สุดซึ่งหารด้วย 13 ลงตัว และเมื่อหารด้วยจำนวนนับตั้งแต่ 2 ถึง 12 เหลือเศษ 1

วิธีทำ จำนวนที่ต้องการคือ ค.ร.น. ของ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 คือ 27,720

จำนวนนับที่หารด้วย 2, 3, 4, ..., 12 เหลือเศษ 1 เขียนได้ในรูป $27,720n + 1$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$

แต่จำนวนดังกล่าวหารด้วย 13 ลงตัว

$$\text{พิจารณา } 27,720n + 1 = (2,132 \times 13 + 4)n + 1$$

$$= (2,132 \times 13n) + (4n + 1)$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{27,720n + 1}{13} = \frac{(2,132 \times 13n)}{13} + \frac{4n + 1}{13}$$

$$= 2,132n + \frac{4n + 1}{13}$$

จำนวนนับ n ที่น้อยที่สุด ซึ่งทำให้ $4n + 1$ หารด้วย 13 ลงตัว คือ $n = 3$

$$\text{ดังนั้น จำนวนที่ต้องการคือ } 27,720(3) + 1 = 83,161$$

ความสัมพันธ์ระหว่าง ห.ร.ม. และ ค.ร.น.

ทฤษฎีบท 10 ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $ab = (a, b)[a, b]$

(a, b) คือ ห.ร.ม. ของ a และ b

$[a, b]$ คือ ค.ร.น. ของ a และ b แล้ว

$$(a, b)[a, b] = ab$$

ตัวอย่างที่ 1. ให้ a เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $(a, 182) = 26$ และ $[a, 182] = 3,034$ จงหาค่า a

วิธีทำ จากทฤษฎีบทที่ว่า ผลคูณเลข 2 จำนวน = ค.ร.น. คูณกับ ห.ร.ม.

$$\text{จะได้ว่า } 182a = 26 \times 3034$$

$$\therefore a = 442$$

ตัวอย่างที่ 2. ถ้าจำนวน x และ 30 มี ห.ร.ม. เป็น 5 และ ค.ร.น. เป็น 150 จงหาค่าของ x

วิธีทำ จากทฤษฎีบทจะได้ว่า

$$(x, 30)[x, 30] = 30x$$

$$(5)(150) = 30x$$

$$\frac{5 \times 150}{30} = x$$

ดังนั้น $x = 25$

ตัวอย่างที่ 3. ถ้าจำนวนเต็มบวก a และ b มี ค.ร.น. และ ห.ร.ม. เป็น 75 และ 5 ตามลำดับ

จงหา ab

วิธีทำ $(a, b)[a, b] = ab$

$$5 \times 75 = ab$$

$$ab = 375$$

ตัวอย่างที่ 4. ถ้าจำนวนเต็มบวกใดๆ ซึ่ง $ab = 36,690$ และ $[a, b] = 630$

จงหา (a, b)

วิธีทำ $(a, b)[a, b] = ab$

$$(a, b) = \frac{36,690}{630} = 63$$

ตัวอย่างที่ 5. เลขสองจำนวนมี ห.ร.ม. คือ 15 และ ค.ร.น. คือ 5,400 ถ้าเลขจำนวนหนึ่งคือ 600 แล้วอีกจำนวนจะมีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 120

2. 125

3. 130

4. 135

วิธีทำ

$$A \times B = \text{ค.ร.น.} \times \text{ห.ร.ม.}$$

$$600 \times B = 15 \times 5400$$

$$B = \frac{15 \times 5400}{600}$$

$$B = 135$$

ตอบข้อ 4

ตัวอย่างที่ 6. ถ้าผลคูณของเลขสองจำนวนที่มี ห.ร.ม. คือ 12 มีค่าเท่ากับ 6,336 แล้ว ค.ร.น. จะมีค่าตรงกับข้อใด

1. 480

2. 528

3. 564

4. 583

วิธีทำ

$$A \times B = \text{ค.ร.น.} \times \text{ห.ร.ม.}$$

$$6336 = \text{ค.ร.น.} \times 12$$

$$\frac{6336}{12} = \text{ค.ร.น.}$$

$$528 = \text{ค.ร.น.}$$

ตอบข้อ 2

ตัวอย่างที่ 7. ถ้าจำนวนเต็มบวก x และ 126 มี ห.ร.ม. เป็น 18 และ ค.ร.น. เป็น 252 แล้ว x คือจำนวนในข้อใด

1. 12

2. 34

3. 36

4. 38

วิธีทำ

$$A \times B = \text{ค.ร.น.} \times \text{ห.ร.ม.}$$

$$A \times 126 = 252 \times 18$$

$$A = \frac{252 \times 18}{126}$$

$$A = 36$$

ตอบข้อ 3

ตัวอย่างที่ 8. ผลคูณของเลขสองจำนวน 1,320 ซึ่งเลขทั้งสองจำนวนนี้มี ค.ร.น. เป็น 88 แล้ว ห.ร.ม. ของเลขสองจำนวนนี้เป็นเท่าใด

1. 5

2. 10

3. 15

4. 20

วิธีทำ

$$A \times B = \text{ค.ร.น.} \times \text{ห.ร.ม.}$$

$$1,320 = \text{ห.ร.ม.} \times 88$$

$$\frac{1320}{88} = \text{ห.ร.ม.}$$

$$15 = \text{ห.ร.ม.}$$

ตอบข้อ 3

ตัวอย่างที่ 9. เลขจำนวนเต็มบวกสองจำนวน x และ y มี ห.ร.ม. เท่ากับ 5 และ ค.ร.น. เท่ากับ 50 และ

$$x^2 - y^2 = 525 \text{ ผลต่างของเลขสองจำนวนนี้คือข้อใด}$$

1. 15

2. 20

3. 25

4. 35

วิธีทำ

$$xy = \text{ค.ร.น.} \times \text{ห.ร.ม.}$$

$$xy = 5 \times 50$$

$$xy = 250$$

$$y = \frac{250}{x} \dots\dots\dots (1)$$

$$x^2 - y^2 = 525 \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{แทน (1) ใน (2)} \quad x^2 - \left(\frac{250}{x}\right)^2 = 525$$

$$x^2 - \frac{62500}{x^2} = 525$$

$$\text{นำ } x^2 \text{ คูณตลอด } x^4 - 62500 = 525x^2$$

$$x^4 + 525x^2 - 62500 = 0$$

$$(x^2 - 625)(x^2 + 100) = 0$$

$$(x - 25)(x + 25)(x^2 + 100) = 0$$

$$\therefore x = 25, -25$$

$$\text{เลือก } x = 25 \text{ แทนใน (1) จะได้ } y = \frac{250}{25}$$

$$y = 10$$

$$\therefore x - y = 25 - 10$$

$$= 15$$

ตอบข้อ 1

ตัวอย่างที่ 10. เลข 2 จำนวน มี ค.ร.น. เป็น 120 และเป็น 12 เท่าของ ห.ร.ม. ของเลขจำนวนนี้ ถ้าเลขจำนวนหนึ่งเป็น 30 เลขอีกจำนวนหนึ่งเป็นเท่าใด

1. 40

2. 60

3. 20

4. 80

วิธีทำ ค.ร.น. = 120

$$\text{ห.ร.ม.} = 10$$

ค.ร.น. เป็น 12 เท่า ของ ห.ร.ม.

$$A \times B = \text{ค.ร.น.} \times \text{ห.ร.ม.}$$

$$A \times 30 = 120 \times 10$$

$$A = \frac{120 \times 10}{30}$$

$$A = 40$$

ตอบข้อ 1

ตัวอย่างที่ 11. เลขสองจำนวนมี ห.ร.ม. คือ 7 ค.ร.น. คือ 504 ถ้าเลขจำนวนหนึ่งคือ 72 เลขอีกจำนวนหนึ่งเป็นเท่าใด

1. 49

2. 52

3. 56

4. 70

วิธีทำ

$$A \times B = \text{ค.ร.น.} \times \text{ห.ร.ม.}$$

$$A \times 72 = 504 \times 7$$

$$A = \frac{504 \times 7}{72} = 49$$

ตอบข้อ 1

ตัวอย่างที่ 12. เลขสองจำนวนมีตัวคูณร่วมน้อยเท่ากับ 546 และตัวหารร่วมมากเท่ากับ 14 ถ้าเลขจำนวนหนึ่งคือ 42 แล้วเลขอีกจำนวนหนึ่งคือเท่าใด

1. 64

2. 32

3. 16

4. 104

วิธีทำ

$$A \times B = \text{ค.ร.น.} \times \text{ห.ร.ม.}$$

$$42 \times B = 546 \times 14$$

$$B = \frac{546 \times 14}{42}$$

$$B = 182$$

ตอบข้อ 1

ตัวอย่างที่ 13. เลข 2 จำนวนคือ 7 และ 9 มี ค.ร.น. เป็นเท่าใดเมื่อ ห.ร.ม. มีค่าเท่ากับ 1

1. 21

2. 49

3. 63

4. 108

วิธีทำ

$$A \times B = \text{ค.ร.น.} \times \text{ห.ร.ม.}$$

$$7 \times 9 = \text{ค.ร.น.} \times 1$$

$$63 = \text{ค.ร.น.}$$

ตอบข้อ 3

ตัวอย่างที่ 14. เลขสองจำนวนมี ห.ร.ม. เท่ากับ 3 และ ค.ร.น. เท่ากับ 24 ถ้าเลขจำนวนน้อยเป็น 6 เลขจำนวนมากมีค่าเท่าไร

1. 9

2. 12

3. 18

4. 36

วิธีทำ

$$A \times B = \text{ค.ร.น.} \times \text{ห.ร.ม.}$$

$$6 \times B = 24 \times 3$$

$$B = \frac{24 \times 3}{6}$$

$$B = 12$$

ตอบข้อ 2

ตัวอย่างที่ 15 เลข 2 จำนวนไม่เท่ากัน ห.ร.ม. เท่ากับ 3 และ ค.ร.น. เท่ากับ 18 ถ้าเลขจำนวนน้อยเป็น 3 เลข อีกจำนวนมีค่าเท่าใด

1. 72

2. 36

3. 18

4. 9

วิธีทำ

$$A \times B = \text{ค.ร.น.} \times \text{ห.ร.ม.}$$

$$3 \times B = 18 \times 3$$

$$B = \frac{18 \times 3}{3}$$

$$B = 18$$

ตอบข้อ 3

ตัวอย่างที่ 16. ห.ร.ม. ของนิพจน์คือ $x - 7$ แต่ ค.ร.น. คือ $x^3 - 10x^2 + 11x + 70$

ถ้านิพจน์หนึ่งคือ $x^2 - 5x - 14$ อีกนิพจน์หนึ่งคืออะไร

1. $x^2 + 12x + 35$

2. $x^2 + 12x - 35$

3. $x^2 - 12x + 35$

4. $x^2 - 12x - 35$

วิธีทำ

$$A \times B = \text{ค.ร.น.} \times \text{ห.ร.ม.}$$

$$B = \frac{\text{ค.ร.น.} \times \text{ห.ร.ม.}}{A}$$

$$B = \frac{(x^3 - 10x^2 + 11x + 70)(x - 7)}{x^2 - 5x - 14}$$

$$= \frac{(x+2)(x^2 - 12x + 35)(x-7)}{(x+2)(x-7)}$$

$$= x^2 - 12x + 35$$

ตอบข้อ 3

ตัวอย่างที่ 17. ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $a \times b = 8,372$ ถ้า a และ b มีค่าต่างกันน้อยที่สุดจะได้ $a + b$ มีค่าเท่าใด

วิธีทำ พิจารณา $8,372 = 2 \times 2 \times 7 \times 13 \times 23$

$$\text{จาก } a \times b = 8,372$$

$$= 2 \times 2 \times 7 \times 13 \times 23$$

$$= 92 \times 91$$

$$\text{แสดงว่า } a = 92, b = 91$$

$$\text{ดังนั้น } a + b = 92 + 91 = 183$$

ตัวอย่างที่ 18. จำนวนนับที่น้อยที่สุดที่หารด้วย 10 แล้วเหลือเศษ 8 หารด้วย 8 เหลือเศษ 6 หารด้วย 6 เหลือเศษ 4 หารด้วย 4 เหลือเศษ 2 เลขจำนวนนั้นคือ

1. 16 2. 118 3. 122 4. 136

วิธีทำ เลขจำนวนดังกล่าว คือ $= \{ \text{ค.ร.น. ของตัวหาร} \} - \{ \text{ห.ร.ม. ของเศษ} \}$

$$\begin{array}{l} \text{หา ค.ร.น. ของ } 10, 8, 6, 4 \text{ จะได้} \\ \begin{array}{r} 2 \overline{) 10, 8, 6, 4} \\ 2 \overline{) 5, 4, 3, 2} \\ \underline{ 5, 2, 3, 1} \end{array} \\ \therefore \text{ค.ร.น.} = 2 \times 2 \times 5 \times 2 = 120 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{หา ห.ร.ม. ของ } 8, 6, 4, 2 \text{ จะได้} \\ \begin{array}{r} 2 \overline{) 8, 6, 4, 2} \\ \underline{ 4, 3, 2, 1} \end{array} \\ \therefore \text{ห.ร.ม. คือ } 2 \end{array}$$

$$\therefore \text{จำนวนดังกล่าว คือ } 120 - 2 = 118$$

ตอบข้อ 2

ตัวอย่างที่ 19. เลขจำนวนหนึ่ง เมื่อถูกหารด้วย 2,3,4 แล้วเหลือเศษ 1,2,3 ตามลำดับ เลขจำนวนนั้นคือข้อใด

1. 12 2. 11 3. 10 4. 9

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \text{เลขจำนวนนั้น คือ} &= \{ \text{ค.ร.น. ของตัวหาร} \} - \{ \text{ห.ร.ม. ของเศษ} \} \\ &= \{ \text{ค.ร.น. ของ } 2,3,4 \} - \{ \text{ห.ร.ม. ของ } 1,2,3 \} \\ &= 12 - 1 \\ &= 11 \end{aligned}$$

(ตอบข้อ 2)

ตัวอย่างที่ 20. จงหาจำนวนที่น้อยที่สุด ซึ่งหารด้วย 7 เหลือเศษ 6 ถ้าหารด้วย 9 เหลือเศษ 8 และถ้าหารด้วย 13 เหลือเศษ 12

$$\begin{aligned} \text{วิธีแก้} \quad \text{เลขจำนวนนั้น คือ} &= \{ \text{ค.ร.น. ของตัวหาร} \} - \{ \text{ห.ร.ม. ของเศษ} \} \\ &= \{ \text{ค.ร.น. ของ } 7,9,13 \} - \{ \text{ห.ร.ม. ของ } 6,8,12 \} \\ &= 819 - 1 \\ &= 818 \end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนที่น้อยที่สุด ซึ่งหารด้วย 7, 9 และ 13 เหลือเศษ 6, 8 และ 12 ตามลำดับ คือ 818

ตัวอย่างที่ 21. จงหาจำนวนเต็มบวกซึ่งเมื่อหารด้วย 2 เหลือเศษ 1 หารด้วย 3 เหลือเศษ 2 หารด้วย 4 เหลือเศษ 3 และหารด้วย 5 เหลือเศษ 4

$$\begin{aligned}\text{วิธีคิด เลขจำนวนนั้น คือ} &= \{ \text{ค.ร.น. ของตัวหาร} \} - \{ \text{ห.ร.ม. ของเศษ} \} \\ &= \{ \text{ค.ร.น. ของ } 2, 3, 4, 5 \} - \{ \text{ห.ร.ม. ของ } 1, 2, 3, 4 \} \\ &= 60 - 1 \\ &= 59\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 22. ให้ x และ y เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า x และ 1568 มี ห.ร.ม. เป็น 14 และ ค.ร.น. เป็น $(560)y$ และ $x - y = 5$ แล้ว จงหาค่า $x - 4y$

1. 12 2. 14 3. 16 4. 18

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad & (x, 1568) = 14 \\ & [x, 1568] = 560y \\ \text{ดังนั้น} \quad & (x, 1568)[x, 1568] = 1568x \\ & 14(560y) = 1568x \\ & 5y = x \\ \text{จาก} \quad & x - y = 56 \\ & 5y - y = 56 \\ & 4y = 56 \\ & y = 14 \\ & x = 70\end{aligned}$$

$$x - 4y = (70) - 4(14) = 16 \quad \text{ตอบ ข้อ 3}$$

ตัวอย่างที่ 27. ให้ x และ y เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า x และ 1320 มี ห.ร.ม. เป็น 6 และ ค.ร.น. เป็น $(3960)y$ และ $x - y = 323$ แล้ว จงหาค่า $x - 4y$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad & (x, 1320) = 6 \\ & [x, 1320] = 3960y \\ \text{ดังนั้น} \quad & (x, 1320)[x, 1320] = 1320x \\ & 6(3960y) = 1320x \\ & x = 18y \\ \text{จาก} \quad & x - y = 323 \\ & 18y - y = 323 \\ & 17y = 323 \\ & y = 19 \\ & x = 342 \quad \text{ดังนั้น } x - 4y = 342 - 4(19) = 266\end{aligned}$$