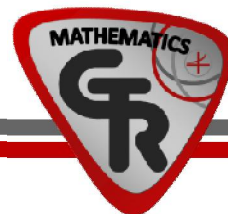
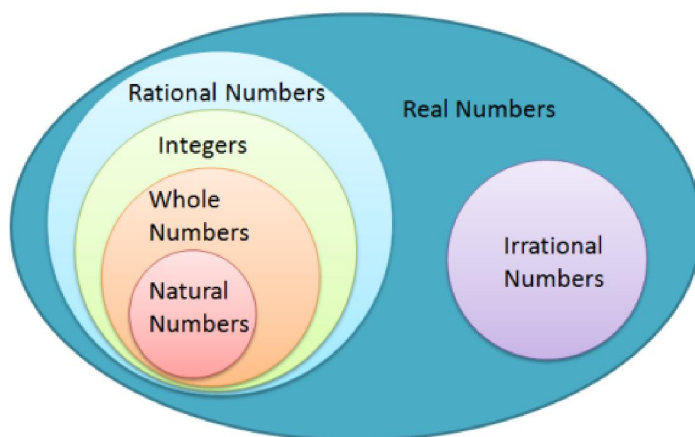




เอกสารประกอบการเรียนการสอน
วิชาคณิตศาสตร์

Real Numbers System ระบบจำนวนจริง

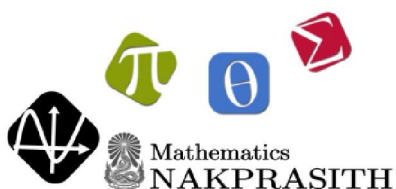
โรงเรียนนาครประสิทธิ์ มูลนิธิวัดบางช้างเหนือ จังหวัดนครปฐม
อาจารย์รังสรรค์ ทองสกนอก



ชื่อ..... เลขที่ ม.....

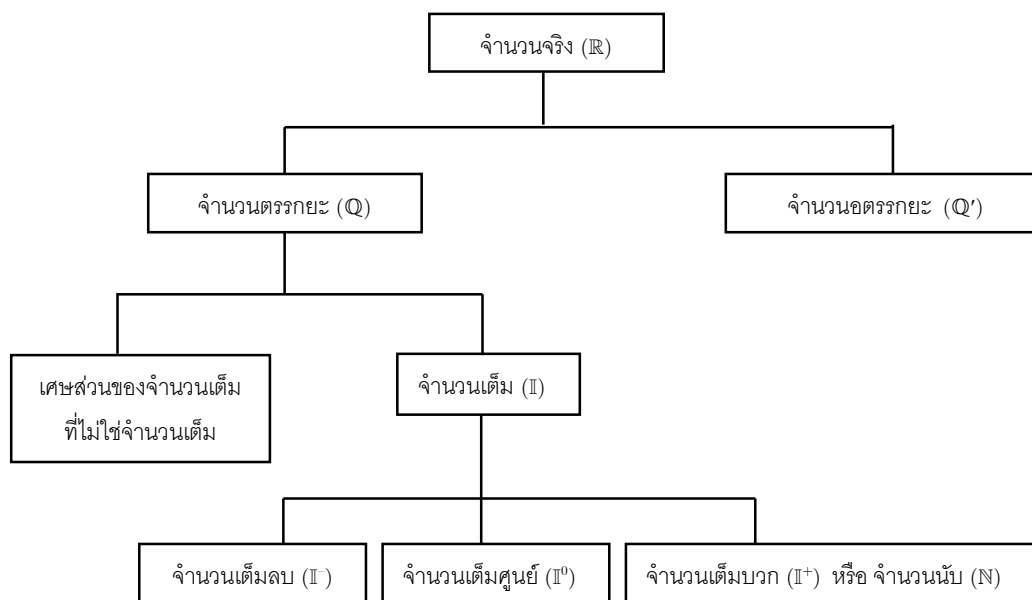
โรงเรียนนาครประสิทธิ์ มูลนิธิวัดบางช้างเหนือ จังหวัดนครปฐม
อาจารย์รังสรรค์ ทองสกนอก





ระบบจำนวนจริง

1. โครงสร้างของระบบจำนวนจริง



ตัวอย่าง 1 จงพิจารณาจำนวนที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ว่าเป็นจำนวนชนิดใด โดยทำเครื่องหมาย ✓ ให้ตรงกับจำนวนนั้นๆ (สามารถตอบได้มากกว่า 1 ชนิด)

ข้อ	จำนวน	N	I	I'	Q	Q'	R
1	0						
2	2.91452						
3	$-\frac{1}{2}$						
4	$\sqrt{3}$						
5	π						
6	0.12121212...						
7	12						
8	3.14						
9	$\frac{22}{7}$						
10	3.78778777877778...						



แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงพิจารณาจำนวนที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ว่าเป็นจำนวนชนิดใด
โดยทำเครื่องหมาย ✓ ให้ตรงกับจำนวนนั้นๆ (สามารถตอบได้มากกว่า 1 ชนิด)

ข้อ	จำนวน	N	I	I'	Q	Q'	R
1	2.54						
2	$-\frac{10}{5}$						
3	$\sqrt{5}$						
4	$\frac{0}{0}$						
5	$\sqrt[3]{-64}$						
6	$2 + \sqrt{2}$						
7	12.4 $\dot{5}$						
8	- e						
9	1.45445444544445...						
10	$\frac{\sqrt{2}}{3}$						
11	0.59999...						
12	$\sqrt{-2}$						
13	$\sqrt{2}\sqrt{8}$						
14	$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$						
15	$\frac{2}{5^3}$						
16	2^0						
17	0^0						
18	$\frac{1}{9^2}$						
19	0.45454545...						
20	$\sqrt[3]{-1}$						

คำถามน่าสนใจ : 0.999... เป็นจำนวนเต็มไหม ?



2. จงพิจารณาว่าข้อต่อไปนี้เป็นจริง(T) หรือเป็นเท็จ(F)

- 1. 0 เป็นจำนวนเต็มบวกหรือจำนวนเต็มลบก็ได้
- 2. $\sqrt[3]{-27}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ
- 3. $-|-3|$ เป็นจำนวนเต็มบวก
- 4. $\sqrt{9} + \sqrt{4}$ เป็นจำนวนเต็มบวก
- 5. -0.866 เป็นจำนวนตรรกยะ
- 6. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ
- 7. $\sqrt{\sqrt{16}}$ เป็นจำนวนตรรกยะ
- 8. $\frac{8}{0}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ
- 9. $\frac{0}{\sqrt{3}}$ เป็นจำนวนจริง
- 10. มีจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุด
- 11. มีจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด
- 12. มีจำนวนเต็มลบที่น้อยที่สุด
- 13. มีจำนวนเต็มลบที่มากที่สุด
- 14. มีจำนวนตรรกยะระหว่างสองจำนวนอตรรกยะใดๆเสมอ
- 15. มีจำนวนอตรรกยะระหว่างสองจำนวนตรรกยะใดๆเสมอ
- 16. มีจำนวนจริงที่มากที่สุดที่น้อยกว่า 2
- 17. มีจำนวนจริงที่น้อยที่สุดที่มากกว่า 1
- 18. 0.141144111444... เขียนเป็นเศษส่วนที่มีเศษและส่วนเป็นจำนวนเต็มได้
- 19. มีจำนวนตรรกยะ $a \neq 0$ และจำนวนอตรรกยะ b ซึ่ง ab เป็นจำนวนตรรกยะ
- 20. ถ้า a, b เป็นจำนวนตรรกยะบวกแล้ว a^b เป็นจำนวนตรรกยะเสมอ
- 21. มีจำนวนอตรรกยะ a, b ซึ่ง $a \neq -b$ และ $a + b$ เป็นจำนวนตรรกยะ
- 22. ถ้า a, b เป็นจำนวนอตรรกยะ และ $b \neq \frac{1}{a}$ แล้ว ab เป็นจำนวนอตรรกยะเสมอ
- 23. จำนวนจริงที่ได้จากการแก้สมการ $\sqrt{x+25} = -4$ มีค่าน้อยกว่า 0
- 24. ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ $a \leq 0 \leq b$ แล้ว เราสรุปได้ว่า $a^2b \geq ab^2$
- 25. ถ้า a, b, c เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ $ac = bc$ แล้ว เราสรุปได้ว่า $a = b$



2. การเท่ากันของจำนวนจริง

การเท่ากันในระบบจำนวนจริง มีสมบัติดังต่อไปนี้

กำหนดให้ a , b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

- (1) สมบัติการสะท้อน(Reflexive Property) : $a = a$
- (2) สมบัติการสมมาตร(Symetric Property) : ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$
- (3) สมบัติการถ่ายทอด(Transitive Property) : ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$
- (4) สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน : ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$
- (5) สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน : ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$

3. สมบัติของระบบจำนวนจริง

3.1 สมบัติของจำนวนจริง ด้านพีชคณิต

ให้ a , b และ c เป็นจำนวนจริง การดำเนินการบวกและการคูณบนจำนวนจริงมีสมบัติดังนี้

สมบัติ	การบวก	การคูณ
ปิด	$a + b \in \mathbb{R}$	$ab \in \mathbb{R}$
การสลับที่	$a + b = b + a$	$ab = ba$
การเปลี่ยนกลุ่ม	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(ab)c = a(bc)$
การมีเอกลักษณ์	มี 0 เป็นเอกลักษณ์ โดยที่ $a + 0 = 0 + a = a$	มี 1 เป็นเอกลักษณ์ โดยที่ $1 \times a = a \times 1 = a$
การมีอินเวอร์ส	อินเวอร์สของจำนวนจริง a คือ $-a$ โดยที่ $a + (-a) = 0$	อินเวอร์สของจำนวนจริง $a \neq 0$ คือ $\frac{1}{a}$ โดยที่ $a \left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}\right)a = 1$
การแจกแจง	$a(b + c) = ab + ac$	

Note : สำหรับการดำเนินการ $*$ บนเซต A

- 1) สมบัติปิด เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ $x, y \in A$ แล้ว $x * y \in A$
- 2) สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ $x, y, z \in A$ แล้ว $(x * y) * z = x * (y * z)$
- 3) สมบัติการมีเอกลักษณ์ เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ มี $e \in A$ ซึ่งทุกๆ $x \in A$ ซึ่ง $e * x = x * e = x$
- 4) สมบัติการมีอินเวอร์ส เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ $x \in A$ มี x' ซึ่ง $x' * x = x * x' = e$
- 5) สมบัติการสลับที่ เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ $x, y \in A$ แล้ว $y * x = x * y$

ถ้า A และ $*$ มีสมบัติ 1) – 4) เราเรียกว่าระบบ A และ $*$ กรุ๊ป(Group)

ถ้า A และ $*$ มีสมบัติ 1) – 5) เรียกว่าระบบ A และ $*$ กรุ๊ปสลับที่(commutative Group)



ตัวอย่าง 1 กำหนดให้ $A = \{-1, 0, 1\}$ จงตอบคำถามต่อไปนี้

- (1) A มีสมบัติปิดการบวกหรือไม่
- (2) A มีสมบัติการคูณหรือไม่
- (3) A มีสมบัติปิดการลบหรือไม่
- (4) A มีสมบัติการหารหรือไม่
- (5) A มีเอกลักษณ์การบวกหรือไม่
- (6) A มีเอกลักษณ์การคูณหรือไม่
- (7) สมาชิก A ทุกตัวมีอินเวอร์สการบวกหรือไม่
- (8) สมาชิก A ทุกตัวยกเว้น 0 มีอินเวอร์สการคูณหรือไม่
- (9) A กับการบวก เป็นกลุ่มหรือไม่
- (10) A กับการคูณ เป็นกลุ่มหรือไม่

ตัวอย่าง 2 กำหนดให้ $\mathbb{I}$ เป็นเซตของจำนวนเต็ม และ $*$ เป็นโอเปอเรชันที่กำหนดโดย

$$a * b = a + b + 2 \text{ เมื่อ } a, b \in \mathbb{I}$$

จงพิจารณาว่า $\mathbb{I}$ กับ $*$ เป็นกลุ่มสลับที่หรือไม่



แบบฝึกหัดที่ 2 – 3

1. กำหนดให้ $a * b = a + b - 8$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{I}$ เมื่อ $\mathbb{I}$ คือเซตของจำนวนเต็ม
จงตอบคำถามต่อไปนี้

(1) จงแสดงว่า $\mathbb{I}$ มีสมบัติปิดภายใต้ $*$

(2) จงแสดงว่า $\mathbb{I}$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มภายใต้ $*$

(3) จงแสดงว่า $\mathbb{I}$ มีเอกลักษณ์ภายใต้ $*$

(4) จงแสดงว่า $\mathbb{I}$ มีอินเวอร์สภายใต้ $*$

(5) จงแสดงว่า $\mathbb{I}$ มีคุณสมบัติการสลับที่ภายใต้ $*$

2. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ เป็นจริงหรือเป็นเท็จ

(1) เซตจำนวนตรรกยะมีสมบัติปิดของการบวกและการลบ

(2) เซตจำนวนตรรกยะมีสมบัติปิดของการหาร

(3) เซตจำนวนคู่มิมีสมบัติปิดของการคูณ

(4) เซตจำนวนเต็มมีสมบัติปิดภายใต้การหารและการคูณ



- (5) เซตจำนวนอตรรกยะมีสมบัติปิดภายใต้การบวก
- (6) เซตจำนวนอตรรกยะมีสมบัติปิดภายใต้การคูณ
- (7) เซตของจำนวนเต็มหารด้วย 5 ลงตัว มีสมบัติปิดภายใต้การบวกและการคูณ
- (8) เซตของจำนวนคี่มีสมบัติปิดภายใต้การบวกและการลบ
- (9) เซต $\{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{n} \in \mathbb{N}\}$ มีสมบัติปิดภายใต้การคูณ
- (10) เซตของจำนวนเต็มมีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มได้ภายใต้การลบ
- (11) เซตของจำนวนตรรกยะมีสมบัติการจัดหมู่ภายใต้การคูณ
- (12) เซตของจำนวนเต็มบวก มีเอกลักษณ์การบวกและเอกลักษณ์การคูณ
- (13) เซตของจำนวนคี่มีเอกลักษณ์การคูณแต่ไม่มีเอกลักษณ์การบวก
- (14) เซตของจำนวนเต็มหารด้วย 5 ลงตัว มีเอกลักษณ์ของการบวกและการคูณ
- (15) กำหนด $x * y = (x - y)^2$ จะได้ว่า $x * y = y * x$ ทุกๆ $x, y \in \mathbb{R}$
- (16) กำหนด $x * y = x - y + xy$ จะได้ว่า $x * y = y * x$ ทุกๆ $x, y \in \mathbb{R}$
- (17) กำหนด $x * y = x - y + xy$ จะได้ว่า $(x*y)*z = x*(y*z)$ ทุกๆ $x, y, z \in \mathbb{R}$
- (18) กำหนด $x * y = x + 4y$ จะได้ว่า $(x*y)*z = x*(y*z)$ ทุกๆ $x, y, z \in \mathbb{R}$
- (19) อินเวอร์สการคูณของ $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ คือ $\sqrt{3} - \sqrt{2}$
- (20) อินเวอร์สการบวกของ $\frac{1}{a} - b$ คือ $\frac{a}{1 - ab}$



3. กำหนดเซต $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และนิยาม $x * y =$ เศษที่เกิดจากการหาร xy ด้วย 5
จงตอบคำถามต่อไปนี้

- (1) จงแสดงว่าเซต A มีสมบัติปิดภายใต้ $*$

*	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

- (2) จงพิจารณาว่า สำหรับ $a, b \in A$ มีสมบัติว่า $(a * b) * c = a * (b * c)$ หรือไม่

- (3) จงพิจารณาว่า สำหรับ $a, b \in A$ มีสมบัติว่า $a * b = b * a$ หรือไม่

- (4) จงพิจารณาว่า เซต A มีเอกลักษณ์ภายใต้ $*$ หรือไม่

- (5) จงหาอินเวอร์สภายใต้ $*$ ของสมาชิกแต่ละในเซต A



4. จงหาอินเวอร์สของ 5 ภายใต้การ $\oplus$ ซึ่งนิยาม $a \oplus b = a + b + 2ab$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{I}$

5. กำหนดให้ $a, b \in \mathbb{R}$ และนิยาม $a \Delta b = \frac{a+b}{2}$

จงพิจารณาข้อใดต่อไปนี้เป็นจริงหรือเป็นเท็จ

(1) $a \Delta b = b \Delta a$

(2) $(a \Delta b) \Delta c = a \Delta (b \Delta c)$

(3) เซตของจำนวนจริงมีสมบัติปิดภายใต้ Δ

(4) เซตของจำนวนจริงมีเอกลักษณ์ภายใต้ Δ

(5) ในเซตของจำนวนจริงและ Δ 6 มีอินเวอร์ส



4. ทฤษฎีบทพื้นฐานในระบบจำนวนจริง

จากหัวข้อ 2.1 และ 2.2 ได้กล่าวถึง สมบัติของการเท่ากัน และสมบัติของจำนวนจริงกับการบวกและการคูณไปแล้ว ยังมีสมบัติเพิ่มเติมเป็นทฤษฎีบทตามมาที่จะกล่าวต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1 (สมบัติการตัดออกของการบวก) กำหนดให้ a , b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

(1) ถ้า $a + c = b + c$ แล้ว $a = b$

(2) ถ้า $c + a = c + b$ แล้ว $a = b$

พิสูจน์

ทฤษฎีบท 4.2 (สมบัติการตัดออกของการคูณ) กำหนดให้ a , b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

(1) ถ้า $ac = bc$ แล้ว $a = b$

(2) ถ้า $ca = cb$ แล้ว $a = b$

พิสูจน์



ทฤษฎีบท 4.3 (สมบัติการคูณด้วย 0) กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

พิสูจน์

ทฤษฎีบท 4.4 (สมบัติการคูณด้วย -1) กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้

$$a \cdot (-1) = (-1) \cdot a = -a$$

พิสูจน์



ทฤษฎีบท 4.5 (สมบัติการคูณแล้วได้ผลคูณเป็น 0) กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ
ถ้า $ab = 0$ แล้ว $a = 0$ หรือ $b = 0$

พิสูจน์

ทฤษฎีบท 4.6 กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงใดๆ

ถ้า $a \neq 0$ แล้ว $a^{-1} \neq 0$

พิสูจน์



ทฤษฎีบท 4.7 (สมบัติของอินเวอร์สของอินเวอร์ส) กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้ว่า

$$(1) -(-a) = a$$

$$(2) (a^{-1})^{-1} = a \text{ เมื่อ } a \neq 0$$

พิสูจน์

ทฤษฎีบท 4.8 กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ จะได้ว่า

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$$

พิสูจน์



ทฤษฎีบท 4.9 กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้ว่า

$$(1) \quad (-a)b = -ab$$

$$(2) \quad a(-b) = -ab$$

$$(3) \quad (-a)(-b) = ab$$

พิสูจน์



แบบฝึกหัดที่ 4

1. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ จงพิสูจน์
ถ้า $a + b = a$ แล้ว $b = 0$

2. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ จงพิสูจน์
ถ้า $a + b = 0$ แล้ว $a = -b$

3. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ จงพิสูจน์
ถ้า $ab = a$ แล้ว $b = 1$

4. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ จงพิสูจน์
ถ้า $ab = 1$ แล้ว $b = a^{-1}$



5. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ จงพิสูจน์
ถ้า $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ แล้ว $ab \neq 0$

6. จงพิสูจน์

$$(1) \quad -0 = 0$$

$$(2) \quad 1^{-1} = 1$$

$$(3) \quad (-1)^{-1} = -1$$

7. วิธีทำต่อไปนี้เป็นผิดที่ตำแหน่งใด

$$\text{ถ้า} \quad a^2 - a^2 = (a + a)(a - a)$$

$$\text{ดังนั้น} \quad a(a - a) = (a + a)(a - a)$$

$$a = a + a \quad [\text{สมบัติการตัดออกของการคูณ}]$$

$$\text{ดังนั้น} \quad 1a = 2a \quad [\text{สมบัติมีเอกลักษณ์ของการคูณ}]$$

$$1 = 2 \quad [\text{สมบัติการตัดออกของการคูณ}]$$



5. การลบและการหารจำนวนจริง

ในหัวข้อนี้เราจะให้ความหมายของการลบและการหาร ดังนิยามต่อไปนี้

นิยาม การลบจำนวนจริง

กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ

$$a - b = a + (-b) \quad (a \text{ บวกกับ อินเวอร์สของการบวกของ } b)$$

ตัวอย่างเช่น $4 - 6 = 4 + (-6)$

โดยอาศัยสมบัติการบวกของจำนวนจริง จะได้สมบัติการลบของจำนวนจริง ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.1 (สมบัติการแจกแจงของการลบ) กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

$$(1) \quad a(b - c) = ab - ac$$

$$(2) \quad (a - b)c = ac - bc$$

พิสูจน์ (1)

ทฤษฎีบท 5.2 (สมบัติการตัดออกของการลบ) กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

$$(1) \quad \text{ถ้า } a - b = a - c \text{ แล้ว } b = c$$

$$(2) \quad \text{ถ้า } a - c = b - c \text{ แล้ว } a = b$$

พิสูจน์ (1)

**นิยาม การหารจำนวนจริง**

กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่ $b \neq 0$

$$\frac{a}{b} = a(b^{-1}) \quad (a \text{ คูณกับ อินเวอร์สของการคูณของ } b)$$

ตัวอย่างเช่น $\frac{4}{6} = 4(6^{-1}) = 4\left(\frac{1}{6}\right)$

โดยอาศัยสมบัติการคูณของจำนวนจริง จะได้สมบัติการหารของจำนวนจริง ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.3 กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่ $b \neq 0$ และ $c \neq 0$ จะได้

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} = \frac{ca}{cb}$$

พิสูจน์

ทฤษฎีบท 5.4 กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่ $b \neq 0$ จะได้

$$c\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{ca}{b}$$

พิสูจน์



ทฤษฎีบท 5.5 กำหนดให้ a , b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่ $b \neq 0$ จะได้

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

พิสูจน์

ทฤษฎีบท 5.6 กำหนดให้ a , b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่ $b \neq 0$ และ $c \neq 0$ จะได้

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{bc}$$

พิสูจน์



ทฤษฎีบท 5.7 กำหนดให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่ $b \neq 0$ และ $d \neq 0$ จะได้

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 5.8 กำหนดให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่ $b \neq 0$ และ $d \neq 0$ จะได้

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 5.9 กำหนดให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่ $b \neq 0$ และ $d \neq 0$ จะได้

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{ac}{bd}\right)$$

พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 5.10 กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ จะได้

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 5.11 กำหนดให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่ $b \neq 0, c \neq 0$ และ $d \neq 0$ จะได้

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{ad}{bc}$$

พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 5.12 กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่ $b \neq 0$ จะได้

$$(1) \quad \text{ถ้า } \frac{a}{b} = c \quad \text{แล้ว } a = bc$$

$$(2) \quad \text{ถ้า } a = bc \quad \text{แล้ว } \frac{a}{b} = c$$

พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด



แบบฝึกหัดที่ 5

1. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 5.1 ข้อ (2)

2. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 5.2 ข้อ (2)

3. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 5.7

4. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 5.8

5. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 5.9

6. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 5.10

7. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 5.11

8. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 5.12



6. สมการพหุนามตัวแปรเดียว

สมการพหุนามตัวแปรเดียว หมายถึง สมการที่อยู่ในรูป

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

เมื่อ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริงซึ่งเป็นค่าคงตัว

และ x เป็นตัวแปร โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์

เรียกจำนวนจริง $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ ว่า **สัมประสิทธิ์** ของสมการพหุนาม (1)

ถ้า $a_n \neq 0$ จะเรียกสมการ (1) ว่า สมการพหุนามดีกรี n

ตัวอย่าง 1 จงหาเซตคำตอบของสมการ $4x^3 - 3x^2 - 64x + 48 = 0$

จากตัวอย่างข้างต้น เราแก้สมการข้างต้นด้วยการแยกตัวประกอบที่อาศัยสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มและแจกแจง ซึ่งสมการพหุนามบางสมการไม่สามารถใช้ได้ เครื่องมือหนึ่งที่จะช่วยในการแยกตัวประกอบของสมการพหุนาม คือทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

6.1 เครื่องมือช่วยในการแยกตัวประกอบสมการพหุนาม ***

ทฤษฎีบทที่จะกล่าวต่อไปนี้เป็นเครื่องมือช่วยในการแยกตัวประกอบในสมการพหุนาม โดยจะกล่าวถึงเพียงตัวทฤษฎีบทและละเว้นการพิสูจน์ไว้สำหรับผู้สนใจ

ทฤษฎีบท 6.1 ทฤษฎีบทเศษเหลือ(Remainder Theorem)

กำหนดพหุนาม $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

เมื่อ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ โดยที่ $a_n \neq 0$ และ $n \in \mathbb{I}^+$

ถ้า หาร $P(x)$ ด้วย $x - c$ เมื่อ $c \in \mathbb{R}$

แล้ว เศษเหลือจากการหาร $P(x)$ ด้วย $x - c$ เท่ากับ $P(c)$



ตัวอย่าง 2 กำหนด $P(x) = 3x^2 - 2x + 5$ จงหาเศษเหลือจากการหาร $P(x)$ ด้วย $x + 1$

ตัวอย่าง 3 กำหนดให้พหุนาม $P(x) = 3x^3 + x^2 - ax + b$ เมื่อ a, b เป็นค่าคงตัว
ถ้าพหุนาม $x + 1$ และ $x - 1$ ต่างก็หาร $P(x)$ ลงตัว
จงหาเศษเหลือที่ได้จากการหาร $P(x)$ ด้วย $x - a - b$

ทฤษฎีบท 6.2 ทฤษฎีบทแยกตัวประกอบ (Factor Theorem)

กำหนดพหุนาม $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

เมื่อ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ โดยที่ $a_n \neq 0$ และ $n \in \mathbb{I}^+$

จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง c ซึ่งทำให้ $(x - c)$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$

ก็ต่อเมื่อ $P(c) = 0$

ตัวอย่าง 4 กำหนดพหุนาม $P(x) = 3x^3 + 4x^2 + 3x + 2$

จงพิจารณาว่า พหุนามที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ หรือไม่

(1) $x + 1$

(2) $x - 2$



ตัวอย่าง 5 ถ้า $x - 2$ เป็นตัวประกอบร่วมของพหุนาม $x^3 - ax^2 + \frac{a}{4}x + 2b$ และ $x^2 + ax - ab$ จงหาค่าของ $a + b$

ทฤษฎีบท 6.3 ทฤษฎีบทตัวประกอบจำนวนตรรกยะ

กำหนดพหุนาม $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

เมื่อ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ โดยที่ $a_n \neq 0$ และ $n \in \mathbb{I}^+$

จะได้ว่า

$x - \frac{k}{m}$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $P(x)$ โดยที่ m, k เป็นจำนวนเต็ม

ซึ่ง $m \neq 0$ และ ห.ร.ม. ของ m และ k เท่ากับ 1

ก็ต่อเมื่อ m จะเป็นตัวประกอบของ a_n , k จะเป็นตัวประกอบของ a_0

ตัวอย่าง 6 กำหนด $P(x) = 12x^3 + 16x^2 - 5x - 3$

จงหาพหุนาม $x - \frac{k}{m}$ ทั้งหมด และจงพิจารณาว่าพหุนามใดเป็นตัวประกอบของ $P(x)$



6.2 การหารสังเคราะห์ (Synthetic Division) ***

เมื่อหารพหุนาม $P(x)$ ด้วย $x - c$ จะเกิดพหุนาม จะพหุนาม $Q(x)$ และ $P(c)$ ซึ่ง

$$P(x) = (x - c)Q(x) + P(c) \quad \text{โดยที่ } P(c) \in \mathbb{R}$$

การหารสังเคราะห์เป็นวิธีการหารพหุนาม ที่นำเฉพาะสัมประสิทธิ์ของพหุนามมาพิจารณา มีขั้นตอนดังนี้ตัวอย่างนี้

ตัวอย่าง 7 กำหนดพหุนาม $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$

(1) จงแสดงว่า $x - 3$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$

(2) จงหาผลหารของ $P(x)$ ที่หารด้วย $x - 3$

ตัวอย่าง 8 กำหนดพหุนาม $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - x - 5$

(1) จงหาผลหารและเศษเหลือที่ได้จากการหาร $P(x)$ ด้วย $x + 2$

(2) จงหาผลหารและเศษเหลือที่ได้จากการหาร $P(x)$ ด้วย $2x - 1$



6.3 การแยกตัวประกอบของพหุนามโดยทฤษฎี 6.1- 6.3 และใช้การหารสังเคราะห์ ***

กำหนดพหุนาม $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

เมื่อ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ โดยที่ $a_n \neq 0$ และ $n \in \mathbb{I}^+$

โดยอาศัยทฤษฎีบท 5.1 – 5.3 และการหารสังเคราะห์ มีขั้นตอนในการแยกตัวประกอบพหุนาม ดังนี้

ขั้นที่ 1 : หา m ซึ่งเป็นตัวประกอบของ a_n และหา k ซึ่งเป็นตัวประกอบของ a_0

ที่ทำให้ $P\left(\frac{k}{m}\right) = 0$ จะได้ $x - \frac{k}{m}$ เป็นตัวประกอบ ของ $P(x)$

ขั้นที่ 2 : หาร $P(x)$ ด้วย $x - \frac{k}{m}$ สมมติว่าได้ผลหารเป็น $Q(x)$

ขั้นที่ 3 : นำผลหาร $Q(x)$ ที่ได้จากขั้นที่ 2 มาแยกตัวประกอบโดยทำขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 ใหม่ จนกว่าจะผลหารเป็นพหุนามดีกรีสอง ซึ่งสามารถแยกตัวประกอบได้ง่ายๆ

*** ความรู้เดิม ***

พหุนามกำลังสอง $P(x) = ax^2 + bx + c$ โดยที่ $a \neq 0$ จะได้ว่า

(1) $P(x)$ แยกตัวประกอบได้ในระบบจำนวนจริง เมื่อ $b^2 - 4ac \geq 0$

(2) $P(x)$ แยกตัวประกอบไม่ได้ในระบบจำนวนจริง เมื่อ $b^2 - 4ac < 0$

ค่า $b^2 - 4ac$ เรียกว่าค่าดิสคริมิแนนต์(discriminant)

ตัวอย่าง 9 จงแยกตัวประกอบของพหุนาม $x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$

ตัวอย่าง 10 จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

(1) $3x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

(2) $12x^3 - 16x - 5x + 3$

(3) $4x^4 - 4x^3 - 9x^2 + x + 2$



6.4 การแก้สมการพหุนาม

ขั้นตอนการแก้สมการพหุนาม

ขั้นที่ 1 : จัดสมการพหุนาม (1) ให้มีด้านใดด้านหนึ่งของสมการเป็น 0

ขั้นที่ 2 : แยกตัวประกอบพหุนาม ที่ได้จากขั้นที่ 1

ขั้นที่ 3 : หาคำตอบของสมการพหุนามโดยสมบัติของจำนวนจริงที่ว่า

$$\text{ถ้า } ab = 0 \text{ แล้ว } a = 0 \text{ หรือ } b = 0$$

สมบัติเกี่ยวกับสมการพหุนาม

กำหนดสมการพหุนามดีกรี n ดังนิยามหน้า 23

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad \dots\dots (a)$$

(1) สมการจะมีจำนวนคำตอบที่เป็นจำนวนจริงอย่างมาก n คำตอบ

(2) ถ้า n เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่าสมการมีจำนวนคำตอบที่เป็นจำนวนจริงเสมอ ***

(3) ถ้าสมการ (a) มี ส.ป.ส. เป็นจำนวนตรรกยะ

ถ้า $a + \sqrt{b}$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{Q}$ และ $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}'$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการนี้

แล้ว $a - \sqrt{b}$ เป็นคำตอบของสมการนี้ด้วย ***

ความสัมพันธ์ระหว่างคำตอบของสมการของพหุนาม ***

(1) สมการพหุนามดีกรีสอง $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ จะได้ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

สมการมีคำตอบในระบบจำนวนจริง เมื่อ $b^2 - 4ac \geq 0$

สมการไม่มีคำตอบในระบบจำนวนจริง เมื่อ $b^2 - 4ac < 0$

$$\text{จะมี ผลบวกของคำตอบ} = \frac{-b}{a} \quad \text{ผลคูณของคำตอบ} = \frac{c}{a}$$

(2) สมการพหุนามดีกรีสาม $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$

$$\text{จะมี ผลบวกของคำตอบ} = \frac{-b}{a} \quad \text{ผลคูณของคำตอบ} = -\frac{d}{a}$$

$$\text{ผลบวกของผลคูณที่ละ 2 ราก} = \frac{c}{a}$$

(3) สมการพหุนามดีกรี n $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$

$$\text{จะมี ผลคูณของคำตอบ} = \pm \frac{a_0}{a_n} \quad (\text{เป็น} + \text{เมื่อ } n \text{ เป็นคู่, เป็น} - \text{เมื่อ } n \text{ เป็นคี่})$$

$$\text{ผลบวกของคำตอบ} = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

หมายเหตุ ผลบวกและผลคูณของคำตอบ ได้จากคำตอบทุกตัวทั้งที่ซ้ำและไม่ซ้ำกันด้วย



ตัวอย่าง 11 จงหาเซตคำตอบของสมการพหุนามแต่ละข้อต่อไปนี้

$$(1) \quad 4x^4 - 4x^3 - 9x^2 + x + 2 = 0$$

$$(2) \quad 6x^4 + x^3 - 16x^2 + 11x = 2$$

$$(3) \quad 6x^3 + 6x = 11x^2 + 1$$



ตัวอย่าง 12 ให้ a เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $x - a$ หาร $x^3 + 2x^2 - 5x - 2$ เหลือเศษ 4
จงหาผลบวกของค่า a ทั้งหมดที่สอดคล้องเงื่อนไขดังกล่าว

ตัวอย่าง 13 (นำไปใช้กับการแก้สมการติดกรณฑ์) จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

$$(1) \quad \sqrt{2x-3} - \sqrt{x+7} + 2 = 0$$

$$(2) \quad \sqrt{3x+4} - \sqrt{x-6} = \sqrt{2x+2}$$



แบบฝึกหัดที่ 6

1. กำหนด $P(x)$ และ c ดังต่อไปนี้ จงหาเศษเมื่อหาร $P(x)$ ด้วย $x - c$

(1) $P(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$
 $c = 2$

(2) $P(x) = -x^3 + 6x^2 + 6x - 3$
 $c = -2$

(3) $P(x) = 4x^3 - 13x + 6$
 $c = -1$

(4) $P(x) = 2x^4 - 5x^3 - x^2 + 3x + 1$
 $c = \frac{1}{2}$

2. จงใช้การหารสังเคราะห์หาค่าผลหารและเศษเหลือจากการหารในแต่ละข้อ

(1) $(x^2 - 5x + 4) \div (x - 1)$

(2) $(x^3 + 2x^2 - 7x + 3) \div (x + 2)$

(3) $(x^3 - 3x + 6) \div (x + 3)$

(4) $(x^3 + 4x^2 - 25x - 98) \div (x - 5)$

(5) $(6x^3 - 14x^2 + 16x + 8) \div (3x - 1)$



3. จงหาค่า t ที่ทำให้ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

(1) $x - 3$ หาร $x^3 - 4x^2 - x + t$ ลงตัว

(2) $x - 2$ หาร $2x^3 + tx^2 - 3x + 4t$ ลงตัว

(3) $x + 1$ หาร $2x^5 - x^3 - 3x^2 + t$ เหลือเศษ 4

(4) $x + t$ หาร $x^2 + 5x - 2$ เหลือเศษ -8

(5) $x^2 - 1$ เป็นตัวประกอบของ $x^4 + tx^3 - 5x^2 + 3x + 4$

4. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

(1) $x^3 - x^2 - 8x + 12$

(2) $x^4 - 5x^2 + 4$



(3) $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$

(4) $3x^3 - 10x^2 + 9x - 2$

(5) $6x^3 + 43x^2 + 27x - 70$

(6) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$

(7) $x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

(8) $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$

(9) $8x^3 + 46x^2 - 67x + 21$

(10) $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$



5. จงหาเซตคำตอบของสมการพหุนามต่อไปนี้

$$(1) \quad 2x^2 - 9x + 10 = 0$$

$$(2) \quad 2x^3 + 7x^2 + 3x = 0$$

$$(3) \quad 2x^3 - 3x^2 - 7x - 6 = 0$$

$$(4) \quad x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$(5) \quad x^4 - x^3 - 7x^2 = 14x + 24$$

$$(6) \quad 9x^4 - 3x^3 + 34x^2 - 12x - 8 = 0$$

$$(7) \quad x^5 + x^3 = 2x^2 + 12x + 8 \quad (8) \quad x^5 + x^4 - 9x^3 - 5x^2 + 16x + 12 = 0$$



*6. ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะบวก และ m, n เป็นจำนวนเต็ม

ถ้า $x + 3$ หาร $x^3 + mx^2 + nx + p$ ลงตัว และ $x - 1$ หาร $x^3 + mx^2 + nx + p$ เหลือเศษ 4 จงหาค่า m และ n

*7. กำหนด $p(x) = x^6 + ax^3 - x + b$ โดยที่ a, b เป็นจำนวนจริง

ถ้า $x - 1$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ -1 และ $x + 1$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ 1 แล้ว x หาร $p(x)$ จะเหลือเศษเท่าใด

*8. ถ้า k และ m เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $x + 2$ เป็นตัวประกอบของ $x^3 - kx^2 + 2x + 7m$ และ $x - 1$ เป็นตัวประกอบของ $x^3 - 3x^2 + kx - 1$ แล้ว $k + m$ มีค่าเท่าใด



- *9. กำหนดให้ $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริง
ถ้า $x - 1$ และ $x + 3$ ต่างหาร $P(x)$ แล้วเหลือเศษ 5 ดังนั้น $a + 2b$ มีค่าเท่าใด
- *10. ถ้าเศษที่ได้จากการหารพหุนาม $p(x)$ ด้วย $x - 1$ และ $x - 2$ คือ 2 และ 1 ตามลำดับแล้ว
จงหาเศษที่เหลือจากการหาร $p(x)$ ด้วย $x^2 - 3x + 2$
- *11. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $x^2 + ax + b$ หาร $x^3 - 3x^2 + 5x + 7$ มีเศษเหลือ
เท่ากับ 10 จงหาค่าของค่าของ $a + b$



7. การไม่เท่ากันของจำนวนจริง (Inequality)

สมบัติของจำนวนจริง(เพิ่มจากหน้า 4 หัวข้อ 3)

ในเซตของจำนวนจริง มีเซต $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ ที่มีสมบัติเพิ่มจากหัวข้อ 2.2 (หน้า 4) อีกดังนี้

(1) $0 \notin \mathbb{R}^+$ และ ถ้า a เป็นจำนวนจริงที่ $a \neq 0$ แล้ว $a \in \mathbb{R}^+$ หรือ $-a \in \mathbb{R}^+$ เพียงอย่างหนึ่งอย่างใดเท่านั้น

(2) ถ้า $a, b \in \mathbb{R}^+$ แล้ว $a + b \in \mathbb{R}^+$

(3) ถ้า $a, b \in \mathbb{R}^+$ แล้ว $ab \in \mathbb{R}^+$

บทนิยาม ให้ a เป็นจำนวนจริง

ถ้า $a = 0$ เรียก a ว่าจำนวนจริงศูนย์

ถ้า $a \in \mathbb{R}^+$ เรียก a ว่าจำนวนจริงบวก

ถ้า $-a \in \mathbb{R}^+$ เรียก a ว่าจำนวนจริงลบ

จากสมบัติของเซตจำนวนจริงบวกในตารางข้างต้น เป็นการอธิบายสมบัติบางประการของระบบจำนวนจริงบวก ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของระบบจำนวนจริง ทั้งนี้เพื่อจะนำไปใช้อธิบายเกี่ยวกับสมบัติการไม่เท่ากันของจำนวนจริง ดังนี้

เพื่อความสะดวกในการกล่าวถึง ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนจริง a และ b จึงกำหนดใช้สัญลักษณ์ที่จะใช้แทนความหมาย

a เท่ากับ b ใช้สัญลักษณ์ $a = b$

a น้อยกว่า b หรือ b มากกว่า a ใช้สัญลักษณ์ $a < b$

a มากกว่า b หรือ b น้อยกว่า a ใช้สัญลักษณ์ $a > b$

และถ้าเขียน $a < b < c$ หมายถึง $a < b$ และ $b < c$

บทนิยาม ให้ a, b เป็นจำนวนจริง

$a = b$ หมายถึง $a - b = 0$

$a < b$ หมายถึง $b - a \in \mathbb{R}^+$

$a > b$ หมายถึง $a - b \in \mathbb{R}^+$

**สมบัติของจำนวนจริงด้านการมีอันดับ (Ordering Properties)****สมบัติไตรวิภาค (Trichotomy Property)**

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว $a = b$ หรือ $a < b$ หรือ $b > a$
จะเป็นจริงเพียงอย่างหนึ่งอย่างใดเท่านั้น

สมบัติของการไม่เท่ากัน

จากสมบัติข้างต้นทำให้เกิดสมบัติของการไม่เท่ากันของจำนวนจริง สำหรับกรณีที่ $a = b$ ได้กล่าวไปแล้ว ต่อไปจะกล่าวถึงเฉพาะกรณีที่ $a < b$ และ $b > a$ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7.1 (สมบัติของจำนวนจริงเมื่อเปรียบเทียบกับ 0) กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

- (1) a เป็นจำนวนจริงบวก ก็ต่อเมื่อ $a > 0$
- (2) a เป็นจำนวนจริงลบ ก็ต่อเมื่อ $a < 0$

พิสูจน์ (1)

ทฤษฎีบท 7.2 กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

- (1) $a > b$ ก็ต่อเมื่อ $a - b > 0$
- (2) $a < b$ ก็ต่อเมื่อ $b - a < 0$

พิสูจน์ (1)



ทฤษฎีบท 7.3 กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

- (1) ถ้า $a > 0$ และ $b > 0$ แล้ว $ab > 0$
- (2) ถ้า $a < 0$ และ $b < 0$ แล้ว $ab > 0$
- (3) ถ้า $a > 0$ และ $b < 0$ แล้ว $ab < 0$
- (4) ถ้า $a < 0$ และ $b > 0$ แล้ว $ab < 0$

พิสูจน์ (1)

ทฤษฎีบท 7.4 กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

- (1) ถ้า $ab > 0$ แล้ว $(a > 0 \text{ และ } b > 0)$ หรือ $(a < 0 \text{ และ } b < 0)$
- (2) ถ้า $ab < 0$ แล้ว $(a > 0 \text{ และ } b < 0)$ หรือ $(a < 0 \text{ และ } b > 0)$

พิสูจน์ (1)

ทฤษฎีบท 7.5 (สมบัติเกี่ยวกับอินเวอร์สการบวก) กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

- (1) ถ้า $a > 0$ แล้ว $-a < 0$
- (2) ถ้า $a < 0$ แล้ว $-a > 0$

พิสูจน์ (1)



ทฤษฎีบท 7.6 (สมบัติเกี่ยวกับอินเวอร์สการคูณ) กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

$$(1) \text{ ถ้า } a > 0 \text{ แล้ว } \frac{1}{a} > 0$$

$$(2) \text{ ถ้า } a < 0 \text{ แล้ว } \frac{1}{a} < 0 \quad \left[\frac{1}{a} = a^{-1} \right]$$

พิสูจน์ (1)

ทฤษฎีบท 7.7 (สมบัติการถ่ายทอด) ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

$$\text{ถ้า } a < b \text{ และ } b < c \text{ แล้ว } a < c$$

พิสูจน์

ทฤษฎีบท 7.8 (สมบัติการบวกด้วยจำนวนเท่ากัน) ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

$$\text{ถ้า } a < b \text{ แล้ว } a + c < b + c$$

พิสูจน์

ทฤษฎีบท 7.9 (สมบัติการตัดออกของการบวก) ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

$$\text{ถ้า } a + c < b + c \text{ แล้ว } a < b$$

พิสูจน์



ทฤษฎีบท 7.10 (สมบัติการคูณด้วยจำนวนเท่ากัน) ให้ a , b และ c เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

- (1) ถ้า $a < b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac < bc$
- (2) ถ้า $a < b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac > bc$

พิสูจน์ (1)

ทฤษฎีบท 7.11 (สมบัติการตัดออกของคุณ) ให้ a , b และ c เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

- (1) ถ้า $ac < bc$ และ $c > 0$ แล้ว $a < b$
- (2) ถ้า $ac < bc$ และ $c < 0$ แล้ว $a > b$

พิสูจน์ (1)

ทฤษฎีบท 7.12 (สมบัติการไม่เท่ากันของอินเวอร์ส) ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง
จะได้ว่า

- (1) ถ้า $a < b$ แล้ว $-a > -b$
- (2) ถ้า $a < b$ และ $ab < 0$ แล้ว $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ $[\frac{1}{a} = a^{-1}, \frac{1}{b} = b^{-1}]$

พิสูจน์ (2)



ทฤษฎีบท 7.13 (สมบัติการบวก การลบ การคูณ และการหารของการไม่เท่ากัน)

ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

- (1) ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว $a + c < b + d$
- (2) ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว $a - d < b - c$
- (3) ถ้า $0 < a < b$ และ $0 < c < d$ แล้ว $ac < bd$
- (4) ถ้า $a < b < 0$ และ $c < d < 0$ แล้ว $ac > bd$
- (5) ถ้า $0 < a < b$ และ $0 < c < d$ แล้ว $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$
- (6) ถ้า $a < b < 0$ และ $c < d < 0$ แล้ว $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$

พิสูจน์

บทนิยาม กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง

- (1) $a \leq b$ หมายถึง $a < b$ หรือ $a = b$ (a ไม่มากกว่า b)
- (2) $a \geq b$ หมายถึง $a > b$ หรือ $a = b$ (a ไม่น้อยกว่า b)

บทนิยาม (การไม่เท่ากันต่อเนื่อง) กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง

- (1) $a < b < c$ หมายถึง $a < b$ และ $b < c$
- (2) $a < b \leq c$ หมายถึง $a < b$ และ $b \leq c$
- (3) $a \leq b < c$ หมายถึง $a \leq b$ และ $b < c$
- (4) $a \leq b \leq c$ หมายถึง $a \leq b$ และ $b \leq c$

ทฤษฎีบทต่อไปจะกล่าวถึงเซตของจำนวนจริง มีความหนาแน่น(dense)มาก กล่าวคือ ระหว่างจำนวนจริงสองจำนวนใดๆ ที่ไม่เท่ากันจะต้องมีจำนวนจริงที่อยู่ระหว่างสองจำนวนนั้นเสมอ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้



ทฤษฎีบท 7.14 ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง และ $a < b$ แล้ว
จะมีจำนวนจริง c ซึ่ง $a < c < b$

ทฤษฎีบท 7.15 ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง และ $a < b$
แล้ว จะมีจำนวนตรรกยะ c ซึ่ง $a < c < b$

ต่อไปเป็นตัวอย่างโจทย์เกี่ยวกับความไม่เท่ากันของจำนวนจริง โดยอาศัย ทฤษฎีทั้งหมดที่กล่าวไปแล้วทั้งหมด มาเป็นเหตุการณ์พิจารณาและนำไปใช้

ตัวอย่าง 1 จงพิจารณาว่าข้อใดต่อไปนี้ เป็นจริงหรือเป็นเท็จ

- (1) ถ้า $a > 0$ แล้ว $a^2 > a$
- (2) ถ้า $a < b$ แล้ว $a^2 < b^2$
- (3) ถ้า $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ และ $a < b$ แล้ว $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
- (4) ถ้า $0 < a < b$ แล้ว $a^2 < ab$
- (5) ถ้า $a < b$ แล้ว $\sqrt{a} < \sqrt{b}$
- (6) ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว $a - c < b - d$
- (7) ถ้า $0 < a < b$ และ $c < d < 0$ แล้ว $ac < bd$
- (8) ถ้า $a < 0 < b$ แล้ว $ab^2 < a^2b$
- (9) ถ้า $a^2 \geq b^2$ แล้ว $a \geq b$
- (10) ถ้า $ab < cd$ แล้ว $a < c$ และ $b < d$



(11) ถ้า $(a - c)(b - d) > 0$ แล้ว $a < c$ และ $b < d$

(12) ถ้า $a < 0$ และ $a < b$ แล้ว $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

(13) ถ้า $ac < bc$ และ $c > 0$ แล้ว $a^2 < b^2$

(14) ถ้า $0 < a < b$ และ $c < d < 0$ แล้ว $(a - d)^2 < (b - c)^2$

(15) ถ้า $x > 0$ แล้ว $x^n < x^{n+1}$ เมื่อ $n \in \mathbb{I}^+$

ตัวอย่าง 2 กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a \neq b$

จงพิสูจน์ว่า $a^2 + b^2 > 2ab$

ตัวอย่าง 3 กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a > 0$

จงพิสูจน์ว่า $a + \frac{1}{a} > 2$



ตัวอย่าง 4 กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $0 < a$, $0 < b$ และ $a \neq b$

$$\text{จงพิสูจน์ว่า } \frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

ตัวอย่าง 5 กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a > 0$ และ $b > 0$

$$\text{จงพิสูจน์ว่า } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$$

ตัวอย่าง 6

(1) ถ้า $2 < x < 5$ และ $-1 < y < 3$ จงหาค่าของ $x^2 + y$

(2) ถ้า $-5 \leq x \leq -2$ และ $-8 \leq y \leq -3$ จงหาค่า $xy + y^2$



แบบฝึกหัดที่ 7

1. กำหนดให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง จงพิจารณาว่าข้อใดต่อไปนี้ เป็นจริง หรือ เป็นเท็จ

(1) 1 เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยที่สุด (2) -1 เป็นจำนวนเต็มลบที่มีค่ามากที่สุด

(3) ถ้า $a > 0$ แล้ว $a^{-1} > 0$ (4) ถ้า $a < b < 0$ แล้ว $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

(5) ถ้า $a < b$ แล้ว $a - c < b - c$ (6) ถ้า $a < b$ แล้ว $c - a < c - b$

(7) ถ้า $a \geq 0$ แล้ว $-a \leq 0$ (8) ถ้า $a \leq 0$ แล้ว $-a \geq 0$

(9) ถ้า $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ แล้ว $a > b$ (10) ถ้า $ab < 0$ แล้ว $\frac{a}{b} < 0$

(11) ถ้า $0 < a^2 < a$ แล้ว $\frac{1}{a} > 1$ (12) ถ้า $0 < ab < 1$ แล้ว $a + \frac{1}{b} > 1$

(13) ถ้า $a < b < c$ แล้ว $(b - a)(c - b) > 0$

(14) ถ้า $a < b < c$ แล้ว $(b - a) + (c - b) > 0$

(15) ถ้า $a > b$ และ $c > d$ แล้ว $a + c > b + d$

(16) ถ้า $a > b$ และ $c > d$ แล้ว $a - c > b - d$

(17) ถ้า $a > b > 0$ และ $c > d > 0$ แล้ว $ac > bd$

(18) ถ้า $a > b > 0$ และ $c > d > 0$ แล้ว $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$

(19) ถ้า a และ b เป็นจำนวนตรรกยะแล้ว จะมีจำนวนจริง c ซึ่ง $a < c < b$

(20) ถ้า a และ b เป็นจำนวนอตรรกยะแล้ว จะมีจำนวนจริง c ซึ่ง $a < c < b$



*2. กำหนดให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

(1) ถ้า $a < 0$ แล้ว $\frac{1}{a} + a < -2$

(2) ถ้า $a < b$ แล้ว $a^3 < b^3$

(3) ถ้า $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ แล้ว $\frac{(a+b)^2}{2} > ab$

(4) ถ้า $a < b$ แล้ว $a < \frac{a+b}{2} < b$



(5) ถ้า $a \neq b$ แล้ว $a^4 + b^4 > a^3b + ab^3$

(6) ถ้า $a^2 + b^2 = 1$ และ $c^2 + d^2 = 1$ แล้ว $ab + cd \geq 1$

(7) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$

3. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริง และ $a > b$ จงตรวจสอบว่าวิธีทำที่แสดงต่อไปนี้ไม่ถูกต้องที่ขั้นตอนใด จึงทำให้ผลสรุปสุดท้ายไม่เป็นความจริง

วิธีทำ	$a > b$	 (1)
	$a(b - a) > b(b - a)$	 (2)
	$ab - a^2 > b^2 - ab$	 (3)
	$0 > a^2 - 2ab + b^2$	 (4)
	$0 > (a - b)^2$	 (5)

ดังนั้น ถ้า $a > b$ แล้ว $0 > (a - b)^2$ ซึ่งไม่เป็นความจริง



4. กำหนดให้ $0 < a < 1$ จงตรวจสอบว่าวิธีทำที่แสดงต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง
ที่ขั้นตอนใด จึงทำให้ผลสรุปสุดท้ายไม่เป็นความจริง

วิธีทำ $a^2 < a$ (1)

$a^2 - 1 < a - 1$ (2)

$(a - 1)(a + 1) < a - 1$ (3)

$a + 1 < 1$ (4)

$a < 0$ (5)

ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดให้ $0 < a < 1$

3. จงหาคำตอบ

1. ถ้า $2 < x < 5$ และ $-7 < y < -3$ จงหา $xy - y^2$

2. ถ้า $3 < x < 5$ และ $-7 < y < 4$ จงหา xy^2

- *4. กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็มบวก และ

นิยาม $a \Delta b = c$ เมื่อ c คือ จำนวนเต็มบวกที่มากที่สุด โดยที่ $2ab \geq c^2$

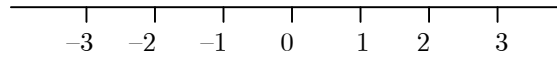
จงหาผลต่างของ $(5 \Delta 7) \Delta 9$ และ $(4 \Delta 6) \Delta 11$



8. ช่วงและการแก้อสมการ

ถ้าลากเส้นตรงเส้นหนึ่ง แล้วเลือกจุดหนึ่งให้เป็นจุด 0 แทนจำนวนศูนย์ เลือกลูกบอลหน่วยความยาวให้จุดทางขวาของ 0 เท่ากับ 1, 2, 3, ... หน่วย แทนจำนวน 1, 2, 3, ... ตามลำดับ

ให้จุดทางซ้ายของ 0 เท่ากับ 1, 2, 3, ... หน่วย แทนจำนวน $-1, -2, -3, \dots$ ตามลำดับ



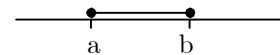
เราสามารถแสดงได้ว่าจำนวนจริงทุกจำนวนจะมีจุดบนเส้นตรงนี้ จับคู่กันเพียงจุดเดียว(one to one) เส้นตรงนี้เรียกว่าเส้นจำนวนจริง (real line) และเนื่องจากมีสมบัติของจำนวนจริงบางเซตเป็นเซตอนันต์ซึ่งไม่สามารถแจกแจงสมาชิกได้ เพื่อความสะดวกจึงกำหนดสัญลักษณ์แทนสมบัติของจำนวนจริงดังกล่าว ซึ่งเรียกว่า “ช่วง” ซึ่งมี 2 ชนิด คือ ช่วงจำกัด และ ช่วงอนันต์

บทนิยาม ช่วง(Interval)

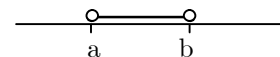
ช่วงจำกัด(finite interval)

ให้ a, b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a < b$ ช่วงจำกัดมี 4 แบบดังนี้

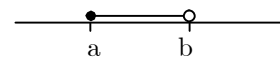
(1) ช่วงปิด $[a, b]$ หมายถึง $\{x \mid a \leq x \leq b\}$



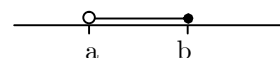
(2) ช่วงเปิด (a, b) หมายถึง $\{x \mid a < x < b\}$



(3) ช่วงครึ่งเปิด $[a, b)$ หมายถึง $\{x \mid a \leq x < b\}$



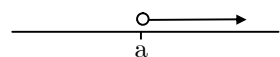
(4) ช่วงครึ่งเปิด $(a, b]$ หมายถึง $\{x \mid a < x \leq b\}$



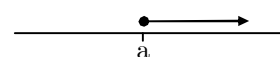
ช่วงอนันต์(infinite interval)

ให้ a เป็นจำนวนจริง ช่วงอนันต์มี 5 แบบดังนี้

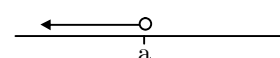
(1) ช่วง (a, ∞) หมายถึง $\{x \mid x > a\}$



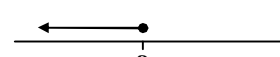
(2) ช่วง $[a, \infty)$ หมายถึง $\{x \mid x \geq a\}$



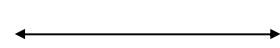
(3) ช่วง $(-\infty, a)$ หมายถึง $\{x \mid x < a\}$



(4) ช่วง $(-\infty, a]$ หมายถึง $\{x \mid x \leq a\}$



(5) ช่วง $(-\infty, \infty)$ หมายถึง $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$





ตัวอย่าง 1 จงใช้เส้นจำนวนแสดงลักษณะของเซตจำนวนจริงต่อไปนี้

(1) $(-\infty, 4] \cup (7, \infty)$

(2) $(-\infty, 2) \cap [1, 6)$

(3) $(-2, 3] - [0, \infty)$

(4) $[4, 8] - (-1, 5]$

ตัวอย่าง 2 กำหนดให้ $A = [-2, 4)$, $B = (-\infty, 1]$ และ $C = (0, 5]$

(1) $(A \cup B') \cap C$

(2) $A' \cup (B - C)$

(3) $(A \cap B') - C$

(4) $(A' \cap B) \cup C$



อสมการ(Inequality)

จากสมบัติของจำนวนจริงด้านการมีอันดับที่ได้กล่าวไปแล้ว สามารถนำไปใช้กับการแก้ปัญหาที่ได้กล่าวถึงการไม่เท่ากันของจำนวนจริงซึ่งเรียกว่าการแก้อสมการ

บทนิยาม อสมการในตัวแปร x หมายถึงประโยคที่มีตัวแปร x ที่ว่าด้วยการไม่เท่ากัน

เช่น $2x + 1 < 0$ เป็นอสมการในตัวแปร x

$y^3 - 1 \geq 0$ เป็นอสมการในตัวแปร y

บทนิยาม คำตอบของอสมการในตัวแปร x หมายถึงสมาชิก a ในเอกภาพสัมพัทธ์ $U \subset \mathbb{R}$ ที่แทนค่า x แล้วทำให้อสมการเป็นจริง

การแก้อสมการ

1. การแก้อสมการกำลังหนึ่ง ทำเช่นเดียวกับการแก้สมการ แต่ต้องระวังการคูณหรือการหารทั้งสองข้างของอสมการด้วยจำนวนจริงลบ เพราะจะส่งผลต่อเครื่องหมายอสมการ
2. การแก้อสมการกำลังตั้งแต่สองขึ้นไป มีขั้นตอนดังนี้
 - ขั้นที่ 1 :** จัดข้างใดข้างหนึ่งของอสมการให้เป็นศูนย์
 - ขั้นที่ 2 :** แยกตัวประกอบพหุนาม โดยให้ตัวประกอบพหุนามทั้งหมดเป็นพหุนามเฉพาะ
 - ขั้นที่ 3 :** แก้อสมการของตัวประกอบของพหุนามทั้งหมด
 - ขั้นที่ 4 :** เขียนเส้นจำนวนจริงแล้วกำหนดจุดบนเส้นจำนวนจริงด้วยคำตอบของสมการที่ได้ในขั้นที่ 3 ทั้งหมด จะทำให้เส้นจำนวนจริงถูกแบ่งออกเป็นช่วงย่อย
 - ขั้นที่ 5 :** เลือกจำนวนจริงที่อยู่ในแต่ละช่วงย่อย ไปแทนค่าในพหุนามของอสมการที่ได้ในขั้นที่ 2 โดยที่
 - ถ้าค่าที่ได้มากกว่า 0 ให้ใส่เครื่องหมาย $+$ ในช่วงย่อยนั้น
 - ถ้าค่าที่ได้น้อยกว่า 0 ให้ใส่เครื่องหมาย $-$ ในช่วงย่อยนั้น
 - ขั้นที่ 6 :** เลือกช่วงย่อยที่เป็นคำตอบของอสมการ โดยที่
 - ถ้าอสมการใน ขั้นที่ 2 เป็นแบบ “..... < 0 ” หรือ “..... ≤ 0 ” เลือกช่วงที่เป็นเครื่องหมาย $-$
 - ถ้าอสมการใน ขั้นที่ 2 เป็นแบบ “..... > 0 ” หรือ “..... ≥ 0 ” เลือกช่วงที่เป็นเครื่องหมาย $+$
 - ขั้นที่ 7 :** เขียนเซตคำตอบของอสมการ โดยนำแต่ละช่วงย่อยที่เลือกได้จากขั้นที่ 6 มายูเนียนกัน



*** การลดรูปอสมการ ***

เพื่อความสะดวกในการแก้สมการ มีการลดรูปอสมการ 3 ลักษณะ ดังนี้

1. ถ้าตัวประกอบพหุนามที่แยกได้ เป็นบวกเสมอ หรือ เป็นลบเสมอ ให้ตัดออกจากอสมการได้เลย โดยถ้าพหุนามที่ตัดออกเป็นบวกเสมอ เครื่องหมายของอสมการยังคงเหมือนเดิม แต่ถ้าพหุนามที่ตัดออกเป็นลบเสมอ เครื่องหมายของอสมการเปลี่ยนเป็นตรงข้าม
 2. ถ้าตัวประกอบของพหุนามที่ซ้ำกันเป็นจำนวนคี่ ให้ลดเป็นกำลังหนึ่ง
 3. ถ้าตัวประกอบของพหุนามที่ซ้ำกันเป็นจำนวนคู่ ให้ลดเป็นกำลังสอง
- เมื่อลดรูปอสมการได้แล้วก็ดำเนินการในขั้นที่ 3 ต่อไปเรื่อยๆ

ข้อควรที่ต้องสังเกตในการแก้สมการ

- (1) ในขั้นที่ (4) ต้องนำคำตอบของสมการตัวประกอบพหุนามที่แยกได้ทั้งหมดไปเขียนบนเส้นจำนวนจริงถึงแม้ที่ซ้ำกันบ้าง
- (2) เครื่องหมาย + และ - สลับกัน แต่ขวามือสุดไม่จำเป็นต้องเป็นบวกเสมอ
- (3) การใส่เครื่องหมายให้ใส่เครื่องหมายในช่วงย่อยทางขวามือก่อน โดยพิจารณาจากผลคูณของ ส.ป.ส. ของตัวแปรในตัวประกอบที่แยกได้ในขั้นที่ 2
- (4) การแก้สมการไม่สามารถใช้การคูณไขว้ได้ ถ้าตัวที่คูณไขว้ไม่ได้มีค่ามากกว่า 0 หรือน้อยกว่า 0 เสมอ
- (5) ไม่สามารถใช้การตัดพหุนามออกทั้งสองข้าง หรือตัดเศษส่วนได้

ตัวอย่าง 3 จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

$$(1) \quad 2x + 5 < 3x + 1$$

$$(2) \quad x^2 + 3x - 4 > 0$$

$$(3) \quad (3 - x)(x + 2) \leq 0$$

$$(4) \quad \frac{2x - 5}{x - 3} \leq 0$$



$$(5) \quad (x^4 + 3)(x + 4)^{14}(x - 1)^{13} > 0 \quad (6) \quad \frac{(x - 3)^{24}(x^2 + x + 2)(x + 1)^{13}}{(x - 1)^{15}(x - 2)^5(x + 2)^{10}} \leq 0$$

$$(7) \quad (2x - 1)(x + 2) \geq 3$$

$$(8) \quad x^3 - 7x + 6 > 0$$

$$(9) \quad \frac{x + 1}{x - 2} < 7$$

$$(10) \quad \frac{1}{x + 1} < \frac{2}{3x - 1}$$

$$(11) \quad \frac{x - 1}{x^3 - 5x^2 + x - 5} \leq 0$$

$$(12) \quad \frac{x^3 - x + 1}{x^3 + 1} \geq 1$$



*** ตัวอย่าง 4 จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

(1) $\sqrt{2x+5} \leq 1$

(2) $\sqrt{3x-6} \leq \sqrt{4x^2+11x-3}$

(3) $\sqrt{x-2} < x-4$

(4) $\sqrt{x-2} \geq x-4$

(5) $\sqrt{x+3} - \sqrt{x} \leq 1$



แบบฝึกหัดที่ 8

1. จงเขียนช่วงต่อไปนี้ในรูปเซตแบบเงี้ยว พร้อมทั้งเขียนแต่ละช่วงด้วยกราฟบนเส้นจำนวน

(1) $(2, 5)$

(2) $[-3, 4]$

(3) $(-3, 7]$

(4) $[-2, 4)$

(5) $(-\infty, -1]$

(6) $(-3, \infty)$

2. จงเขียนช่วงแทนสับเซตของจำนวนจริงในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) $\{x \mid x > 4\}$

(2) $\{x \mid 2 \leq x \leq 6\}$

(3) $\{x \mid -7 < x \leq 3\}$

(4) $\{x \mid x \leq -6\}$

(5) $\{x \mid -2 < x < 10\}$

(6) $\{x \mid -2 \leq x < 2\}$

3. กำหนดเอกภาพสัมพัทธ์ คือเซตของจำนวนจริง

$$A = (2, 5), B = (-1, 9] \text{ และ } C = (-3, \infty)$$

จงหาเซตต่อไปนี้รูปช่วง

(1) A'

(2) B'

(3) C'

(4) $A \cap B$

(5) $B \cap C$

(6) $A - B$

(7) $C - A$

(8) $B \cup C$



4. จงหาเซตคำตอบของอสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้

$$(1) \quad x^3 + 5x + 6 > 0$$

$$(2) \quad x^2 - 2x - 3 \leq 0$$

$$(3) \quad \frac{(x-1)(x+4)}{(x-4)} < 0$$

$$(4) \quad x^3 - 2x^2 \geq x - 2$$

$$(5) \quad \frac{x^3 - 5x^2 - x + 5}{x^2 - 4x - 5} > 0$$

$$(6) \quad \frac{2}{x-2x} \geq \frac{4}{x}$$

$$(7) \quad \frac{x-1}{x^3 - 5x + x - 5} \geq 0$$

$$(8) \quad -6 \leq 2x - 3 \leq 1$$

$$(9) \quad \frac{(x-3)^2(x-1)}{x(x+1)(x-1)} \leq 0$$

$$(10) \quad \frac{(x^2 - 3x - 10)(x^2 + x - 6)}{x^2 - 2x - 15} \geq 0$$



$$(11) \quad \frac{5}{x+1} - \frac{6}{x-3} \geq 7$$

$$(12) \quad 2x^2 + 5x + 1 > 0$$

$$(13) \quad \frac{(x-5)^6}{(x-8)^8} > 0$$

$$(14) \quad -1 \leq \frac{x-3}{x+2} \leq 1$$

$$(15) \quad (x^2 - 4)(x - 1)^2 > 0$$

$$(16) \quad (x+1)(x-1) < (x+1)(x-2)$$

$$(17) \quad \frac{18-15x}{x^2+2x-3} + 6 > 0$$

$$(18) \quad \frac{(x+1)^{15}(x+3)^4(x-5)}{(x-2)(x-4)^6} \leq 0$$



$$(19) \quad x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 26x - 24 \geq 0 \quad (20) \quad \frac{x^3 - 5x^2 - x + 5}{x^2 - 4x - 5} \geq 0$$

$$(21) \quad \frac{x^3 - 6x^2 - 11x + 6}{x + 2} \leq 0 \quad (22) \quad \frac{(x^2 - 3x - 10)(x^2 + x - 6)}{x^2 - 2x - 15} \geq 0$$

5. จงหาเซตคำตอบของอสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้

$$(1) \quad \sqrt{2x + 5} > 2$$

$$(2) \quad \sqrt{\frac{x - 3}{x + 5}} > 2$$

$$(3) \quad \sqrt{x^2 + 4x + 3} \geq \sqrt{15}$$

$$(4) \quad 2 - x \geq \sqrt{2x - 5}$$



$$(5) \quad \sqrt{x-1} > x-3$$

$$(6) \quad \sqrt{x^2 - 8x + 12} < x - 4$$

$$(7) \quad \sqrt{x^2 - 8x + 12} > x - 4$$

$$(8) \quad \sqrt{x-2} - \sqrt{x-2} \leq 2$$

$$(9) \quad \frac{1}{\sqrt{x+2}} < \sqrt{\frac{2x+1}{2}}$$

$$(10) \quad \frac{1}{\sqrt{3-x}} > \frac{1}{\sqrt{x-2} - \sqrt{x-1}}$$



6. ถ้าฐานของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งสั้นกว่าส่วนสูง 5 เซนติเมตร พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมรูปนี้จะมีค่าอยู่ระหว่าง 42 และ 52 ตารางเซนติเมตร จงหาหาความยาวของฐานและความสูงของรูปสามเหลี่ยมนี้

7. เซตคำตอบของสมการ $\sqrt{\sqrt{x+1} + x^2} \leq 1-x$ คือเซตใด

8. ถ้า A เป็นเซตคำตอบของสมการ $3x^2 + 5x + 2 < 0$ และ
B เป็นเซตคำตอบของสมการ $\frac{2x+1}{x-3} \geq 0$ แล้ว $(A \cup B)'$ คือข้อใด



9. ค่าสัมบูรณ์ สมการ และอสมการค่าสัมบูรณ์

9.1 ค่าสัมบูรณ์(Absolute Value)

บทนิยาม ให้ x เป็นจำนวนจริง ค่าสัมบูรณ์ของ x จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|x|$ นิยามดังนี้

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

ตัวอย่างเช่น $|-5| = -(-5)$, $|2.5| = 2.5$, $|0| = 0$

สมบัติของค่าสัมบูรณ์

กำหนดให้ x, y เป็นจำนวนจริงใดๆ

ทฤษฎีบท 9.1 $|x| = |-x|$

ทฤษฎีบท 9.2 $|x| \geq 0$

ทฤษฎีบท 9.3 $|x| \geq x$

ทฤษฎีบท 9.4 $|xy| = |x||y|$

ทฤษฎีบท 9.5 $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ โดยที่ $|y| \neq 0$

ทฤษฎีบท 9.6 $|x|^2 = |x^2| = x^2$

ทฤษฎีบท 9.7 $|x| = |y|$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$ หรือ $x = -y$

ทฤษฎีบท 9.8 $|x| = \sqrt{x^2}$

ทฤษฎีบท 9.9 $|x + y| \leq |x| + |y|$

ทฤษฎีบท 9.10 $|x - y| \geq ||x| - |y||$

ทฤษฎีบท 9.11 $|x + y| \geq ||x| - |y||$

ทฤษฎีบท 9.12 $|x| < a$ หมายถึง $-a < x < a$

$|x| \leq a$ หมายถึง $-a \leq x \leq a$

ทฤษฎีบท 9.13 $|x| > a$ หมายถึง $x < -a$ หรือ $x > a$

$|x| \geq a$ หมายถึง $x \leq -a$ หรือ $x \geq a$

พิสูจน์ให้เป็นแบบฝึกหัด

ข้อสังเกต $|x + y| = |x| + |y|$ ก็ต่อเมื่อ $xy > 0$

$|x - y| = ||x| - |y||$ ก็ต่อเมื่อ $xy > 0$

$|x + y| = ||x| - |y||$ ก็ต่อเมื่อ $xy < 0$



9.2 สมการที่อยู่ในรูปค่าสัมบูรณ์

หลักการสมการค่าสัมบูรณ์ คือ จัดค่าสัมบูรณ์ออกจากสมการให้หมด มีวิธีการตามลักษณะของสมการดังนี้

รูปแบบที่ 1 : $|p(x)| = 0$

สรุปว่า $f(x) = 0$

รูปแบบที่ 2 : $|p(x)| = a$ เมื่อ $a > 0$

สรุปว่า $p(x) = \pm a$

รูปแบบที่ 3 : $|p(x)| = a$ เมื่อ $a < 0$

สรุปว่า เซตคำตอบคือ $\emptyset$

รูปแบบที่ 4 : $|p(x)| = |q(x)|$

สรุปว่า $p(x) = q(x)$ หรือ $p(x) = -q(x)$

รูปแบบที่ 5 : $|p(x)| = q(x)$

สรุปว่า $(p(x) = q(x) \text{ หรือ } p(x) = -q(x))$ และ $q(x) \geq 0$

รูปแบบที่ 6 : $|p(x)| = p(x)$

สรุปว่า $p(x) \geq 0$

รูปแบบที่ 7 : $|p(x)| = -p(x)$

สรุปว่า $p(x) \leq 0$

รูปแบบที่ 8 : $|p(x)| + |q(x)| = |p(x) + q(x)|$

สรุปว่า $p(x)q(x) \geq 0$

รูปแบบที่ 9 : $|p(x)| - |q(x)| = |p(x) - q(x)|$

สรุปว่า $p(x)q(x) \geq 0$ และ $|p(x)| \geq |q(x)|$

รูปแบบที่ 10 : $|p(x)| - |q(x)| = |p(x) + q(x)|$

สรุปว่า $p(x)q(x) \leq 0$ และ $|p(x)| \geq |q(x)|$

รูปแบบที่ 12 : รูปแบบอื่นๆนอกจากนี้ จะอาศัยนิยามในการแก้ซึ่งต้องแยกเป็นกรณี ดังนี้

ถ้า $p(x) \geq 0$ จะได้ $|p(x)| = p(x)$

ถ้า $p(x) < 0$ จะได้ $|p(x)| = -p(x)$

****หมายเหตุ****

การจัดค่าสัมบูรณ์อาจใช้วิธีการยกกำลังสองทั้งสองได้ เช่น รูปแบบที่ 1 – 4

โดยใช้สมบัติ $|p(x)|^2 = p(x)^2$

แต่จะต้องตรวจสอบคำตอบด้วยเสมอ



ตัวอย่าง 1 จงหาเซตคำตอบของสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้

$$(1) \quad |x^2 - 5| = 0$$

$$(2) \quad |8 - 5x| = -2$$

$$(3) \quad |2x - 5| = 4$$

$$(4) \quad |3x - 1| = 2 - x$$

$$(5) \quad x + 2 = |x^2 - x - 6|$$

$$(6) \quad |x - 5| = |2x + 4|$$

$$(7) \quad \frac{2}{|x - 1|} = |x|$$

$$(8) \quad \left| \frac{x + 2}{2x - 1} \right| = 1$$

$$(9) \quad \left| \frac{x + 3}{x - 2} \right| = \frac{x + 3}{x - 2}$$

$$(10) \quad |(x + 2)(1 - x)| = (x + 2)(x - 1)$$

$$(11) \quad |x + 2| + |2x - 1| = |3x + 1| \quad (12) \quad |x - 5| - |x| = 5$$



$$(13) \quad x^2 + 3|x| - 4 = 0$$

$$(14) \quad 4|x+2|^2 + 3|x+2| - 1 = 0$$

$$(15) \quad x^2 - 2x + 3 = 3|x-1|$$

$$(16) \quad |2x-5| = |x+2| + 4$$

$$(17) \quad \frac{|x+1|}{|x+1|-1} = 5$$

$$(18) \quad \frac{|x+3|}{|x+2|+5} = \frac{1}{2}$$



9.3 อสมการที่อยู่ในรูปค่าสัมบูรณ์

หลักการอสมการค่าสัมบูรณ์ คือ ขจัดค่าสัมบูรณ์ออกจากอสมการให้หมด มีวิธีการตามลักษณะของอสมการดังนี้

รูปแบบที่ 1 : $|p(x)| < a$ เมื่อ $a > 0$

สรุปว่า $-a < p(x) < a$

รูปแบบที่ 2 : $|p(x)| > a$ เมื่อ $a > 0$

สรุปว่า $p(x) > a$ หรือ $p(x) < -a$

รูปแบบที่ 3 : $|p(x)| < 0$ หรือ $|p(x)| < a$ เมื่อ $a < 0$

สรุปว่าเซตคำตอบคือเซตว่าง

รูปแบบที่ 4 : $|p(x)| < q(x)$

สรุปว่า $-q(x) < p(x) < q(x)$

รูปแบบที่ 5 : $|p(x)| > q(x)$

สรุปว่า $p(x) < -q(x)$ หรือ $p(x) > q(x)$

รูปแบบที่ 6 : $|p(x)| < |q(x)|$

ใช้การยกกำลังสองทั้งสองข้างจะได้ $p(x)^2 < q(x)^2$

ทำให้สรุปว่า $[p(x) - q(x)][p(x) + q(x)] < 0$

รูปแบบที่ 7 : $a < |p(x)| < b$

สรุปว่า $a < |p(x)|$ และ $|p(x)| < b$

รูปแบบที่ 8 : อสมการที่มีรูปแบบอื่นๆ อาศัยนิยามในการแก้ซึ่งต้องแยกเป็นกรณี ดังนี้

ถ้า $p(x) \geq 0$ จะได้ $|p(x)| = p(x)$

ถ้า $p(x) < 0$ จะได้ $|p(x)| = -p(x)$

หลังจากนั้นหาเซตคำตอบของแต่ละอสมการของแต่ละกรณีแล้วนำมายูเนียนกัน

หมายเหตุ รูปแบบของอสมการ 1 – 8 ยังคงเป็นจริงเมื่อเปลี่ยนเป็นเครื่องหมาย $\leq$ หรือ $\geq$

รูปแบบที่ 4, 5 ใช้การยกกำลังสองทั้งสองข้างต้องระวัง(ไม่แนะนำให้ใช้)✖

ตัวอย่าง 2 จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

(1) $|x - 2| < 7$

(2) $|x||x - 5| \geq 6$



$$(3) \quad \left| \frac{3x+1}{x-2} \right| \leq 4$$

$$(4) \quad \left| \frac{3-2x}{2+x} \right| \geq 4$$

$$(5) \quad |2x+1| \leq 3x+2$$

$$(6) \quad |4x-3| > 6x+1$$

$$(7) \quad \frac{1+2x}{|6+3x|} \geq \frac{1}{3}$$

$$(8) \quad 2|x+2| \leq |x+3|$$



$$(9) \quad |3 - |x|| < 1$$

$$(10) \quad ||x| - 3| < |x - 2|$$

$$(3) \quad ||x - 1| - 1| \cdot ||x - 1| + 1| < 50$$

$$(12) \quad \frac{|x|}{|x| - 5} \leq 1$$

$$(13) \quad \frac{|x + 1| + 5}{|2 - x|} > 6$$



ตัวอย่าง 3 จงหาค่าจำนวนจริง M ที่ทำให้ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) $|x^3 - 2| \leq M$ เมื่อ $x \in [-4, 4]$

(2) $|x^2 + 2x - 3| \leq M$ เมื่อ x เป็นจำนวนที่สอดคล้องกับ $|x - 1| < \frac{1}{2}$

(3) $\left| \frac{x+2}{x-2} \right| \leq M$ เมื่อ x เป็นจำนวนที่สอดคล้องกับ $|2x - 1| \leq 2$



แบบฝึกหัดที่ 9

1. กำหนดให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง จงพิจารณาว่าข้อใดต่อไปนี้ เป็นจริง หรือเป็นเท็จ

.....(1) ถ้า $|a + b| = |a| + |b|$ แล้ว $ab \geq 0$

.....(2) ถ้า $a < 0$ แล้ว $a > |a|$

.....(3) $|a - b| = |b - a|$

.....(4) $|a - b| = |a| + |b|$

.....(5) $|a||b| \geq |a|b$

.....(6) ถ้า $a < 0$ และ $b > 0$ แล้ว $|ab| = ab$

.....(7) ถ้า $|a| > |b|$ แล้ว $c|a| \leq |cb|$

.....(8) ถ้า $|a| \leq |b|$ แล้ว $a^3 < b^3$

.....(9) $|a + b| \geq |a - b|$

.....(10) ถ้า $ab \leq 0$ แล้ว $|a - b| = ||a| - |b||$

2. จงหาเซตคำตอบของสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) $|x^2 + 3x - 2| = 2$

(2) $|x^2 + 3x - 6| = 2x + 6$

(3) $|x^2 - 3x + 2| = x^2 - 3x + 2$

(4) $|x^2 + 2x - 3| = 3 - 2x - x^2$

(5) $|x^2 + 3x - 6| = |2x + 6|$

(6) $\frac{3}{|x - 1|} = |x + 1|$



$$(7) \quad |x + 5| = |x| + 5$$

$$(8) \quad |x - 5| = |x - 1| + 4$$

$$(9) \quad |x + 4| + |x - 4| = 8$$

$$(10) \quad |x + 4| + |4 - x| = 8$$

$$(11) \quad |3x - 5| + |2x - 3| = |5x - 8| \quad (12) \quad |x^3 - 8| + |x^2 - 4| = |x^3 + x^2 - 12|$$

$$(13) \quad |x - 3| + |x + 2| - |x - 4| = 3 \quad (14) \quad |x + 1| + |x + 2| + |x - 1| = 5$$

$$(15) \quad 2x^2 - 5|x| - 3 = 0$$

$$(16) \quad 4x^2 + 20x + 19 = |2x + 5|$$



$$(17) \frac{|x+2|}{|x+2|+5} = 6$$

$$(18) |x^2 - 3|x| + 2| = x^2 - 2x$$

$$(19) \left| \left| x - \frac{5}{2} \right| - \frac{3}{2} \right| = |x^2 - 5x + 4| \quad (20) |x-1| + |x-2| + \dots + |x-11| = 55$$

3. จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

$$(1) |x-4||x+1| \leq 0$$

$$(2) |x+3||x-4| > 0$$

$$(3) |x^2 - x - 1| \geq 4$$

$$(4) \left| \frac{3x+1}{x+3} \right| \leq 5$$



$$(5) \quad |x^2 - x - 1| \leq x - 2$$

$$(6) \quad |x^2 - 6| > 4x + 1$$

$$(7) \quad |x - 3| \leq |x^2 - 3|$$

$$(8) \quad |2x^2 - x - 10| > |x^2 - 8x - 22|$$

$$(9) \quad x^2 - |x| - 12 \leq 0$$

$$(10) \quad x^2 + 2|x| - 15 \geq 0$$

$$(11) \quad \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 6x + 9} + \left| \frac{x - 2}{x - 3} \right| - 12 < 0 \quad (12) \quad \frac{2}{|x - 2|} > \left| \frac{-3}{2x - 1} \right|$$



$$(13) \quad |x^2 + x - 20| \leq x^2 + x - 20 \quad (14) \quad |x - 2x^2| > 2x^2 - x$$

$$(15) \quad \frac{4}{|x+1|-2} \geq |x-1| \quad (16) \quad |x-1| + |2x+3| > 5$$

$$(17) \quad |x^2 - 5|x| + 4| \geq |2x^2 - 3|x| + 1|$$



$$(18) \frac{|3x - 2|}{|x + 1| - 1} > 5$$

$$(19) (x - |x - 1|)(x^2 - |x|) \geq 0$$

$$(20) \sqrt{2x^2 + 5x + 3} > |x + 1|$$

4. ถ้า a เป็นจำนวนจริงที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $|x^2 - 4x + 3| \leq a$ ทุกค่า x ซึ่ง $|4x - 11| \leq 5$ แล้ว a มีค่าเท่าใด



10. สมบัติความบริบูรณ์(The axiom on completeness)

สมบัติของความบริบูรณ์เป็นสมบัติหนึ่งที่สำคัญของจำนวนจริง ก่อนอื่นต้องทำความเข้าใจเรื่องเหล่านี้ก่อน

บทนิยาม กำหนดให้ $S \subset \mathbb{R}$

- (1) จำนวนจริง a เป็น**ค่าขอบเขตบน(upper bound)** ของ S
ก็ต่อเมื่อ $x \leq a$ สำหรับทุกๆ $x \in S$ และกล่าวว่า S มีค่าขอบเขตบน
- (2) จำนวนจริง a เป็น**ค่าขอบเขตล่าง(lower bound)** ของ S
ก็ต่อเมื่อ $a \leq x$ สำหรับทุกๆ $x \in S$ และกล่าวว่า S มีค่าขอบเขตล่าง

บทนิยาม กำหนดให้ $S \subset \mathbb{R}$

- (1) จำนวนจริง a เป็น**ขอบเขตบนค่าน้อยสุด(least upper bound)** ของ S
ก็ต่อเมื่อ ไม่มีค่าขอบเขตบนใดของ S ที่น้อยกว่า a
- (2) จำนวนจริง a เป็น**ขอบเขตล่างมากที่สุด(greatest lower bound)** ของ S
ก็ต่อเมื่อ ไม่มีค่าขอบเขตล่างใดของ S ที่มากกว่า a

สัจพจน์ความบริบูรณ์

ในระบบจำนวนจริง ถ้า $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$ และ S มีขอบเขตบน แล้ว
 S จะมีขอบเขตบนค่าน้อยสุด

จากสัจพจน์ของความบริบูรณ์ จะได้ว่า ถ้า $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$ และ S มีขอบเขตล่าง แล้ว
 S จะมีขอบเขตล่างค่ามากที่สุด ด้วย

ตัวอย่าง 1

1. จงหาขอบเขตบนน้อยสุดและขอบเขตล่างมากที่สุดของเซต S ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1) $S = \{-2, 0, 2\}$

ขอบเขตบน =

ขอบเขตบนน้อยสุด =

ขอบเขตล่าง =

ขอบเขตค่าล่างมากที่สุด =

(2) $S = \{1, 2, 3, \dots\}$

ขอบเขตบน =

ขอบเขตบนน้อยสุด =

ขอบเขตล่าง =

ขอบเขตค่าล่างมากที่สุด =



(3) $S = \{\dots, 1, 2, 3\}$

ขอบเขตบน =

ขอบเขตบนน้อยสุด =

ขอบเขตล่าง =

ขอบเขตค่าล่างมากที่สุด =

(5) $S = [-2, 2]$

ขอบเขตบน =

ขอบเขตบนน้อยสุด =

ขอบเขตล่าง =

ขอบเขตค่าล่างมากที่สุด =

(7) $S = (-\infty, 5]$

ขอบเขตบน =

ขอบเขตบนน้อยสุด =

ขอบเขตล่าง =

ขอบเขตค่าล่างมากที่สุด =

(9) $S = \{x \mid x^2 < 5\}$

ขอบเขตบน =

ขอบเขตบนน้อยสุด =

ขอบเขตล่าง =

ขอบเขตค่าล่างมากที่สุด =

(4) $S = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$

ขอบเขตบน =

ขอบเขตบนน้อยสุด =

ขอบเขตล่าง =

ขอบเขตค่าล่างมากที่สุด =

(6) $S = (0, 4)$

ขอบเขตบน =

ขอบเขตบนน้อยสุด =

ขอบเขตล่าง =

ขอบเขตค่าล่างมากที่สุด =

(8) $S = (3, \infty)$

ขอบเขตบน =

ขอบเขตบนน้อยสุด =

ขอบเขตล่าง =

ขอบเขตค่าล่างมากที่สุด =

(10) $S = \{x \mid (x-3)(x-2) > 0\}$

ขอบเขตบน =

ขอบเขตบนน้อยสุด =

ขอบเขตล่าง =

ขอบเขตค่าล่างมากที่สุด =

2. ให้ $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 4}} \geq 1\right\}$ และ

$B = \{n \mid n \text{ เป็นจำนวนเต็มลบ ซึ่ง } n \leq -2\}$

ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $A \cap B$ เท่าใด



สรุป ระบบจำนวนจริง

ในแต่ละหัวข้อเราได้กล่าวถึงสมบัติของระบบจำนวนจริงต่างๆ ที่คัมภีร์มีอยู่ 15 ข้อ และเรียกสมบัติเหล่านั้นว่า **สัจพจน์ของจำนวนจริง** ซึ่งจะขาดข้อใดไปไม่ได้ ดังนั้นระบบจำนวนจริงจึงประกอบด้วยเซต $\mathbb{R}$ พร้อมทั้งการดำเนินการการบวก (+) และการคูณ ($\cdot$) ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ และสัจพจน์ดังนี้

สัจพจน์ 1 : ถ้า $a, b \in \mathbb{R}$ แล้ว $a + b \in \mathbb{R}$

สัจพจน์ 2 : ถ้า $a, b, c \in \mathbb{R}$ แล้ว $(a + b) + c = a + (b + c)$

สัจพจน์ 3 : มี $0 \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้ $0 + a = a + 0 = a$ สำหรับทุก $a \in \mathbb{R}$

สัจพจน์ 4 : ถ้า $a \in \mathbb{R}$ แล้วจะมี $-a \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้ $a + (-a) = (-a) + a = 0$

สัจพจน์ 5 : ถ้า $a, b \in \mathbb{R}$ แล้ว $a + b = b + a$

สัจพจน์ 6 : ถ้า $a, b \in \mathbb{R}$ แล้ว $a \cdot b \in \mathbb{R}$

สัจพจน์ 7 : ถ้า $a, b, c \in \mathbb{R}$ แล้ว $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

สัจพจน์ 8 : มี $1 \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้ $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ สำหรับทุก $a \in \mathbb{R}$

สัจพจน์ 9 : ถ้า $a \in \mathbb{R}$ แล้วจะมี $a^{-1} \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้ $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

สัจพจน์ 10 : ถ้า $a, b \in \mathbb{R}$ แล้ว $a \cdot b = b \cdot a$

สัจพจน์ 11 : ถ้า $a, b \in \mathbb{R}$ แล้ว $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

สัจพจน์ 12 : มีเซต $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ ซึ่ง $0 \notin \mathbb{R}^+$ และ ถ้า a เป็นจำนวนจริงที่ $a \neq 0$

แล้ว $a \in \mathbb{R}^+$ หรือ $-a \in \mathbb{R}^+$ เพียงอย่างหนึ่งอย่างใดเท่านั้น

สัจพจน์ 13 : ถ้า $a, b \in \mathbb{R}^+$ แล้ว $a + b \in \mathbb{R}^+$

สัจพจน์ 14 : ถ้า $a, b \in \mathbb{R}^+$ แล้ว $ab \in \mathbb{R}^+$

สัจพจน์ 15 : ถ้า $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$ และ S มีขอบเขตบน แล้ว S จะมีขอบเขตบนค่าน้อยสุด



แบบฝึกหัดที่ 10

1. จงหาขอบเขตบน ขอบเขตบนน้อยสุด ขอบเขตล่าง และขอบเขตล่างมากที่สุด ของเซตที่กำหนดให้ต่อไปนี้

เซต	ขอบเขตบน	ขอบเขตบน น้อยสุด	ขอบเขตล่าง	ขอบเขตล่าง มากที่สุด
(1) $\emptyset$				
(2) $\{-2, 3, 10\}$				
(3) $\{1, 2, 3, \dots\}$				
(4) $\{1, 2, 3, 4\}$				
(5) $\{\dots, -2, -1, 0\}$				
(6) $\{8\}$				
(7) $(0, 5)$				
(8) $[-5, -2.4]$				
(9) $(3, \infty)$				
(10) $(-\infty, -5]$				

2. จงหาขอบเขตบน ขอบเขตบนน้อยสุด ขอบเขตล่าง และขอบเขตล่างมากที่สุด ของเซตที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1) $\{x | (x - 3)(x - 2) > 0\}$

(2) $\{x | x^2 < 4\}$

(3) $\{x | x = \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{I}^+\}$

(4) $\{x | |x + 2| < 2\}$



3. กำหนดให้ S เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\frac{x-1}{x+2} > 2$ และ a เป็นค่าขอบเขตบนน้อยสุดของ S
จงหาค่าของ $a^2 + 1$

4. ให้ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x^2 + 3x - 3} + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 2\}$
และ a เป็นขอบเขตบนน้อยสุดของ A
 $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y = x^2 + 2x + a\}$
จงหาขอบเขตล่างมากที่สุดของ B
-



แนวแบบทดสอบเรื่อง ระบบจำนวนจริง

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด

1. กำหนดให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง และ $A \subset \mathbb{R}$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $a \in A$ และ $b \in A$ แล้ว $a + b \in A$

ข. มี $a \in A$ และ $b \in A$ แล้ว $a + b \in A$

ข้อความที่แสดงว่า A สอดคล้องกับสมบัติปิดของการบวก คือข้อความใด

1. ข้อความ ก.
2. ข้อความ ข.
3. ข้อความ ก. และ ข.
4. ไม่ใช่ทั้งข้อความ ก. และ ข.

2. กำหนดให้ $A = \{ n \mid n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก และ } \sqrt{n} \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ} \}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. A สอดคล้องกับสมบัติปิดของการบวก

ข. A สอดคล้องกับสมบัติปิดของการคูณ

ข้อความใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อความ ก.
2. ข้อความ ข.
3. ข้อความ ก. และ ข.
4. ไม่ใช่ทั้งข้อความ ก. และ ข.

3. กำหนดให้ $B = \{ n \mid n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก และ } \sqrt{n} \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ} \}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. B สอดคล้องกับสมบัติปิดของการบวก

ข. B สอดคล้องกับสมบัติปิดของการคูณ

ข้อความใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อความ ก.
2. ข้อความ ข.
3. ข้อความ ก. และ ข.
4. ไม่ใช่ทั้งข้อความ ก. และ ข.

4. ถ้า a เป็นจำนวนตรรกยะ และ b เป็นจำนวนอตรรกยะ ข้อความใดถูกต้อง

1. ab เป็นจำนวนอตรรกยะ
2. ab เป็นจำนวนตรรกยะ
3. $a + b$ เป็นจำนวนอตรรกยะ
4. $\frac{a}{b}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

5. ถ้าต้องการให้ข้อความ “ถ้า $a \in A$ แล้ว จะมี $a^{-1} \in A$ ซึ่ง $aa^{-1} = 1$ ” เป็นความจริง เซต A ควรจะเป็นเซตใดต่อไปนี้

1. A เป็นเซตจำนวนตรรกยะ
2. A เป็นเซตจำนวนตรรกยะบวก
3. A เป็นเซตจำนวนเต็มบวก
4. A เป็นเซตจำนวนจริง



6. ข้อความใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

1. ถ้า a เป็นจำนวนจริง แล้ว $\sqrt{|a|}$ เป็นจำนวนตรรกยะ หรือ จำนวนอตรรกยะ
2. ถ้า a เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว $\sqrt{|a|}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ
3. ถ้า a เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว $\sqrt{|a|}$ เป็นจำนวนตรรกยะ
4. ถ้า $\sqrt{|a|}$ เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว a เป็นจำนวนตรรกยะ

7. กำหนดให้ A แทนเซตของจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์ และ $a, b \in A$ และนิยาม $a * b$ ดังนี้

$$a * b = \frac{a^2 - b^2}{ab}$$

ข้อความใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. A มีสมบัติปิดของ $*$
 2. A มีสมบัติสลับของ $*$
 3. $a * b \in A$ ก็ต่อเมื่อ $a \neq b$
 4. A มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่มได้ของ $*$
8. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \}$ ถ้า $a, b \in A$ และนิยาม $a * b$ ดังนี้

$$a * b = \text{เศษที่ได้จากการหาร } ab \text{ ด้วย } 7$$

ข้อความใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

1. A มีสมบัติปิดของ $*$
 2. A มีสมบัติสลับของ $*$
 3. อินเวอร์สของ 4 ภายใต้ $*$ คือ 6
 4. มี $x \in A$ ซึ่ง $x * a = a$ สำหรับทุก $a \in A$
9. กำหนดให้เอกภาพสัมพัทธ์คือเซตของจำนวนจริง จงพิจารณาว่าข้อความใดต่อไปนี้

- ก. ถ้า a เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว a^2 เป็นจำนวนเต็มคู่
- ข. ถ้า a^2 เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว a เป็นจำนวนเต็มคู่
- ค. ถ้า a เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว a^2 เป็นจำนวนเต็มคี่
- ง. ถ้า a^2 เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว a เป็นจำนวนเต็มคี่

ข้อความ ก. - ข. มีข้อถูกกี่ข้อ

1. 1 ข้อ
 2. 2 ข้อ
 3. 3 ข้อ
 4. 4 ข้อ
10. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
1. ถ้า $ab = a$ แล้ว $b = 1$
 2. ถ้า $a^2 < b^2$ แล้ว $a < b$
 3. ถ้า $a^3 < b^3$ แล้ว $a < b$
 4. ถ้า $a < b$ แล้ว $a|b| < b|b|$
11. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง และ $a < b$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
1. $a|a| < b|b|$
 2. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
 3. $a < a + b < b$
 4. $\sqrt{|a|} < \sqrt{|b|}$



12. กำหนดให้ $2 < a < 10$ และ $10 < b < 20$ ข้อความใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

1. $10 < 100 - a < 98$

2. $0 < b^2 - a^2 < 390$

3. $\frac{1}{4} < \frac{100}{b^2} < 1$

4. $100 < b^2 + a^2 < 500$

13. กำหนดให้ $a \in (-2, 4)$ และ $b \in (-4, 1)$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $a + b \in (-6, 6)$

ข. $a - b \in (-3, 3)$

ค. $|a b| \in [0, 16]$

ง. $a^3 - b \in (-9, 68)$

ข้อความ ก. - ข. มีข้อถูกกี่ข้อ

1. 1 ข้อ

2. 2 ข้อ

3. 3 ข้อ

4. 4 ข้อ

14. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $a > 0$, $b > 0$ และ $a \neq b$ แล้ว $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$

ข. มีจำนวนจริงบวก a และ b ซึ่ง $a + b < \frac{4ab}{a+b}$

ข้อความใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อความ ก.

2. ข้อความ ข.

3. ข้อความ ก. และ ข.

4. ไม่ใช่ทั้งข้อความ ก. และ ข.

15. ถ้า a , b และ c เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a < b < c$ แล้วข้อความใดที่ไม่ถูกต้อง

1. $a < \frac{a+b}{2} < b$

2. $a < \frac{a+b+c}{3} < c$

3. $a^3 < b^3 < c^3$

4. $ab < bc$

16. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก และ $a \neq b$ สมการในข้อใดต่อไปนี้ที่ทำให้เราสรุปได้ว่า $|x| \leq a$ และ $|y| \leq b$

1. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

2. $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$

3. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

17. ข้อความใดต่อไปนี้ถูก เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก

1. ถ้า $a < b$ แล้ว $a < b^2$

2. ถ้า $a < b$ แล้ว $a^2 < b$

3. ถ้า $a < b$ แล้ว $a < ab$

4. ถ้า $a < b$ แล้ว $a^2 < b^2$

18. ให้ m , x , y และ z เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์ ถ้า $\frac{x}{y} > z > 0$ แล้วข้อความใดต่อไปนี้จริง

1. $\frac{y}{x} < \frac{1}{z}$

2. $x > yz$

3. $\frac{my}{x} < mz$

4. $\frac{mx}{y} > mz$



28. เซตคำตอบของอสมการ $\frac{7}{x-1} - \frac{6}{x^2-1} < 5$ คือข้อใด
1. $(-\infty, -1) \cup (-\frac{3}{5}, \infty)$
 2. $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$
 3. $(-\infty, -\frac{3}{5}) \cup (-\frac{3}{5}, 1) \cup (2, \infty)$
 4. $(-\infty, -1) \cup (-\frac{3}{5}, 1) \cup (2, \infty)$
29. ผลบวกของทุกคำตอบของสมการ $\sqrt{\frac{x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{x}} = 2\frac{1}{6}$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้
1. 2
 2. 1
 3. -1
 4. 0
30. ให้ $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{|x|}{|x|-1} \leq 2 \}$ และ $B = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \}$ แล้ว $A - B$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้
1. $(-\infty, -2] \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup [2, 3) \cup (3, \infty)$
 2. $(-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup [2, \infty)$
 3. $(-\infty, -2) \cup [-1, 1] \cup [2, \infty)$
 4. $\mathbb{R}$
31. เซตคำตอบของสมการ $|x+2| = -2x+5$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้
1. $\{ x \mid \frac{x-1}{x-7} = 0 \}$
 2. $\{ x \mid \frac{x-7}{x-1} = 0 \}$
 3. $\{ x \mid (x-1)(x-7) = 0 \}$
 4. $\{ x \mid x^2 - 1 = 0 \}$
32. กำหนดให้ $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid 5x^2 - 42x + 16 > 0 \}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้
- ก. $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid \left| x - \frac{21}{5} \right| > \frac{19}{5} \}$
- ข. $B = \mathbb{R} - [\frac{2}{5}, 8]$
- ข้อใดต่อไปนี้ถูก
1. ก ถูก และ ข ถูก
 2. ก ถูก และ ข ผิด
 3. ก ผิด และ ข ถูก
 4. ก ผิด และ ข ผิด
33. เซตคำตอบของอสมการ $\left| \frac{x}{x-1} - 1 \right| \leq \frac{1}{2}$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้
1. $(-\infty, -10) \cup [-10, -1] \cup [3, 10] \cup (10, \infty)$
 2. $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$
 3. $\emptyset$
 4. ข้อ 1, 2, 3 ไม่มีข้อใดถูก



34. กำหนดให้ $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{|x|-1}{|x|-2} \leq 0 \}$

$$B = \{ x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq |x| \leq 3 \}$$

แล้ว $A' \cup B$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $[-3, -1] \cup [1, 3]$

2. $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

3. $[-3, 3]$

4. $(-\infty, \infty)$

35. จำนวนจริง x ที่มากที่สุดที่สอดคล้องกับสมการ $\left| \frac{2x^2 - 4}{3} \right| \geq 2x^2$

เป็นสมาชิกของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $[-1, 0.5)$

2. $[0.5, 1)$

3. $[1, 1.5)$

4. $[1.5, 2)$

36. กำหนด $|x + 2| < 3$ และ $|y - 4| < 3$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $\left| \frac{x+2}{y-4} \right| < 1$ และ $|x + 2| - |y - 4| < 0$

2. $x - y = -6$ และ $-5 < \frac{x}{y} < \frac{1}{7}$

3. $-12 < x - y < 0$ และ $-5 < \frac{x}{y} < 1$

4. $-12 < x - y < 0$ และ $\frac{-5}{7} < \frac{x}{y} < 1$

37. กำหนด $x \in [1, 2]$ และ $y \in [2, 5]$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $x + y \in [3, 7]$

ข. $x - y \in [-4, 0]$

ค. $xy \in [2, 10]$

ง. $\frac{x}{y} \in \left[\frac{1}{5}, 1 \right]$

ข้อเท็จจริงสำหรับข้อความทั้ง 4 ข้อ คือ

1. ถูกต้องเพียง 1 ข้อ

2. ถูกต้องเพียง 2 ข้อ

3. ถูกต้องเพียง 3 ข้อ

4. ถูกต้องทั้ง 4 ข้อ

38. ให้ A และ B เป็นสับเซตของ $\mathbb{R}$ ที่มี a และ b เป็นค่าขอบเขตบนน้อยสุดของ A และ B ตามลำดับ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $a + b$ เป็นค่าขอบเขตบนน้อยสุดของเซต $A + B$

เมื่อ $A + B = \{ x + y \mid x \in A, y \in B \}$

ข. $a - b$ เป็นค่าขอบเขตบนน้อยสุดของเซต $A - B$

เมื่อ $A - B = \{ x - y \mid x \in A, y \in B \}$

ข้อเท็จจริงสำหรับข้อความทั้ง 2 ข้อ คือ

1. ทั้งข้อ ก. และข้อ ข. ถูกต้อง

2. ข้อ ก. เท่านั้นที่ถูกต้อง

3. ข้อ ข. เท่านั้นที่ถูกต้อง

4. ข้อ ก. และข้อ ข. ผิด



39. ให้ $f(x) = ax^5 + 7x^4 - 4x^3 + 2x - b$ ถ้า $x^2 - 1$ เป็นตัวประกอบของ $f(x)$
แล้ว $a^2 - b^2$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. -5 2. 9 3. 45 4. -45

40. เซตในข้อใดต่อไปนี้ เป็นเซตคำตอบของสมการ $9x^3 + 12x^2 + x - 2 = 0$

1. $\{-2, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}\}$ 2. $\{-1, \frac{-2}{3}, \frac{1}{2}\}$
3. $\{-1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$ 4. $\{-1, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\}$

