2

ตรรกศาสตร์

ผศ.ธนวัฒน์ ศรีศิริวัฒน์
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์

บริบทของเนื้อหา

2.1 ประพจน์เชิงเดี่ยวและประพจน์เชิงประกอบ

2.2 ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อม

2.3 การหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อม

2.4 สมมูล นิเสธ และสัจนิรันดร์

05 การสมมูลเชิงตรรกศาสตร์

บริบทของเนื้อหา

2.6

การอ้างเหตุผล

2.7

วลีบ่งปริมาณและการหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีวลีบ่งปริมาณ

2.8

นิเสธของประพจน์ที่มีวลีบ่งปริมาณ

2.9

การตรวจสอบความสมเหตุสมผลโดยใช้แผนภาพของเวนน์-ออยเลอร์

ตรรกศาสตร์เป็นศาสตร์ที่ว่าด้วยกฎเกณฑ์และวิธีการอ้างเหตุผลหรือให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วย ประพจน์ ประพจน์เชิงเดี่ยวและประพจน์เชิงประกอบ ตัวเชื่อมประพจน์ การหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อม การสมมูล สัจนิรันดร์ การให้เหตุผล วลีบ่งปริมาณและการหาค่าความจริงของวลีบ่งปริมาณ นิเสธของประพจน์ที่มีวลีบ่งปริมาณ การตรวจสอบความสมเหตุสมผลโดยใช้แผนภาพแวนน์-ออยเลอร์ ซึ่งเป็นเนื้อหาสำคัญอย่างยิ่งในการศึกษาตรรกศาสตร์

ประพจน์เชิงเดี่ยวและประพจน์เชิงประกอบ

การศึกษาตรรกศาสตร์ให้เข้าใจสิ่งแรกหรือหัวข้อแรกที่จะต้องศึกษาเพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาเนื้อหาอื่นเป็นลำดับต่อไปคือ "ประพจน์" (proposition) โดยมีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม 2.1 ประพจน์ คือ ประโยคที่เป็นจริงหรือเป็นเท็จเพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

ตัวอย่าง 2.1

1. จังหวัดนครศรีธรรมราชอยู่ทางภาคใต้ของประเทศไทย
2. $\sqrt{25}=5$
3. $\frac{1}{2}<\frac{3}{4}$
4. -4 < -1

เนื่องจาก ข้อ 1) – 4) สามารถบอกได้ว่าประโยคเหล่านั้นเป็นจริงหรือเป็นเท็จ จึง**เป็นประพจน์**

5. ทำไมนักศึกษาชอบเล่นไลน์
6. เขาเป็นประธานนักศึกษา
7. กรุณาฟังหน่อย
8. ได้โปรดช่วยฉันเถอะ

ส่วนข้อ 5) – 8) บอกไม่ได้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ จึง**ไม่เป็นประพจน์**

โดยนิยมเขียนแทนประพจน์ด้วยสัญลักษณ์ตัวอักษรตัวพิมพ์เล็กในภาษาอังกฤษ เช่น p , q , r, s เป็นต้นแทนสัญลักษณ์ค่าความจริงของประพจน์ที่เป็นจริง ด้วย “ T ” และค่าความจริงของประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จด้วย “ F ” โดยมีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม 2.2 เรียก ประพจน์ที่เป็นจริงว่า ประพจน์ที่มีค่าความจริง (true value) เป็นจริง แทนด้วยสัญลักษณ์ T และเรียกประพจน์ที่เป็นเท็จว่า ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ แทนด้วยสัญลักษณ์ F

ตัวอย่าง 2.2 จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้เมื่อกำหนดให้

p แทน “กลองเป็นตราสัญลักษณ์ประจำจังหวัดจันทบุรี ”

q แทน “ $-\sqrt{49} = 7$ ”

r แทน “ $\frac{25}{2} > 3\frac{3}{4}$ ”

<u>วิธีทำ</u> จะพบว่า p มีค่าความจริงเป็น “ F ” เพราะตราสัญลักษณ์ประจำจังหวัดจันทบุรีเป็นรูปกระต่ายในดวงจันทร์เปล่งแสงเป็นประกายไม่ใช่กลอง ,

q มีค่าความจริงเป็น “ F ” เพราะ $-\sqrt{49} \neq 7$

และ r มีค่าความจริงเป็น “ T ” เพราะ $\frac{25}{2} > 3\frac{3}{4}$

ประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงข้ามกับประพจน์ที่กำหนดจะเรียกว่า **“นิเสธ”** (negation) ของประพจน์นั้น โดยมีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม 2.3 ให้ p เป็นประพจน์ใด ๆ นิเสธ ของ p เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ ~p เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงกันข้ามกับ p ดังตาราง

p	~p
T	F
F	T

จากตัวอย่าง 2.2 พบว่า p,q และ r เป็นประพจน์ที่ไม่สามารถแยกออกเป็นประพจน์ย่อยมากกว่าหนึ่งประพจน์ได้ เรียกว่า “**ประพจน์เชิงเดี่ยว(simple proposition)**” ส่วนประพจน์ที่เกิดจากการนิเสธประพจน์หรือรวมตั้งแต่สองประพจน์ขึ้นไปเข้าด้วยกันด้วย**ตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์ (logical connective)** ได้แก่ $\wedge, \vee, \rightarrow$ หรือ $\leftrightarrow$ เรียกประพจน์ที่ได้ว่า “**ประพจน์เชิงประกอบ(complex proposition)**” เช่น $p \wedge q$, $p \rightarrow (p \vee q)$ เป็นต้น

ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อม

การเชื่อมประพจน์จะทำได้โดยนำประพจน์เชิงเดี่ยวตั้งแต่ 2 ประพจน์ขึ้นไป สามารถนำประพจน์นั้นมาสร้างประพจน์ใหม่โดยใช้การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม ซึ่งมี 4 แบบดังนี้

1.การเชื่อมประพจน์ด้วย “และ” (^) (conjunction)

กำหนดให้ p, q เป็นประพจน์โดยเชื่อมสองประพจน์นี้ด้วยด้วยตัวเชื่อม “และ” เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ “p^q” อ่านว่า “p และ q” การเชื่อมด้วยตัวเชื่อม “และ” จะมีค่าความจริงเป็นจริงกรณีที่ประพจน์ที่นำมาเชื่อมเป็นจริงทั้งคู่เท่านั้น กรณีอื่นจะมีค่าความจริงของประพจน์เป็นเท็จ แสดงว่าค่าความจริงของ “p^q” ได้ดังตารางค่าความจริง (truth table) ต่อไปนี้

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

2.การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “หรือ” ($\vee$) (disjunction)

กำหนดให้ p , q เป็นประพจน์โดยเชื่อมสองประพจน์นี้ด้วยตัวเชื่อม “หรือ” เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ “p∨q” อ่านว่า “p หรือ q” การเชื่อมด้วยตัวเชื่อม “หรือ” จะมีค่าความจริงเป็นเท็จกรณีเดียวคือ ประพจน์ที่นำมาเชื่อมเป็นเท็จทั้งคู่ กรณีอื่นจะมีค่าความจริงของประพจน์เป็นจริง แสดงว่าค่าความจริงของ “ p∨ q ” ได้ดังตารางค่าความจริงต่อไปนี้

p	q	p∨q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

3.การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “ถ้า...แล้ว...” ($\rightarrow$) (conditional)

กำหนดให้ p , q เป็นประพจน์ โดยเชื่อมสองประพจน์นี้ด้วย ตัวเชื่อม “ถ้า...แล้ว...”เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ด้วยสัญลักษณ์ “$p \rightarrow q$” อ่านว่า “ถ้า p แล้ว q”

การเชื่อมด้วยตัวเชื่อม “ถ้า...แล้ว...” จะมีค่าความจริงเป็นเท็จกรณีเดียวคือ เมื่อประพจน์เหตุ (เหตุ)มีค่าความจริงเป็นจริงและประพจน์ผล (ผล) มีค่าความจริงเป็นเท็จเท่านั้น กรณีอื่นจะมีค่าความจริงของประพจน์เป็นจริง แสดงค่าความจริงของประพจน์ $p \rightarrow q$ ได้ดังตารางค่าความจริงต่อไปนี้

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

4.การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “ก็ต่อเมื่อ” ($\leftrightarrow$) (biconditional)

กำหนดให้ p , q เป็นประพจน์ โดยเชื่อมสองประพจน์นี้ด้วยตัวเชื่อม “ ก็ต่อเมื่อ” เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ “$p\leftrightarrow q$” โดยอ่านว่า “ p ก็ต่อเมื่อ q”

การเชื่อมด้วยตัวเชื่อม “ก็ต่อเมื่อ” จะมีค่าความจริงเป็นจริงกรณีที่ประพจน์ที่นำมาเชื่อมมีค่าความจริงเหมือนกัน กรณีอื่นมีค่าความจริงของประพจน์เป็นเท็จ แสดงค่าความจริงของประพจน์ $p\leftrightarrow q$ ได้ดังตารางค่าความจริงต่อไปนี้

p	q	$p\leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

ข้อตกลง

ถ้าประพจน์หนึ่งเกิดจากประพจน์ย่อยหลายประพจน์ ปกติต้องใส่วงเล็บ แต่ถ้าไม่เขียนวงเล็บจะตกลงดังนี้

สัญลักษณ์	$\leftrightarrow$	เป็นตัวเชื่อมที่คลุมความมากที่สุด
	$\rightarrow$	เป็นตัวเชื่อมที่คลุมความมากรองลงมา
	$\wedge, \vee$	เป็นตัวเชื่อมที่คลุมความน้อยกว่า
	$\sim$	เป็นตัวเชื่อมที่คลุมความน้อยที่สุด

เช่น $p \vee \sim q$ หมายถึง $p \vee (\sim q)$

$p \vee q \rightarrow r$ หมายถึง $(p \vee q) \rightarrow r$

$p \leftrightarrow q \rightarrow r$ หมายถึง $p \leftrightarrow (q \rightarrow r)$

จากข้างต้นอาจสรุปได้ว่า การเชื่อมประพจน์ตั้งแต่ 2 ประพจน์ขึ้นไป สามารถเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม "และ" , "หรือ" , "ถ้า...แล้ว..." , "ก็ต่อเมื่อ" แทนด้วยสัญลักษณ์ "$\wedge$", "$\vee$", "$\rightarrow$" , "$\leftrightarrow$" ตามลำดับ

การหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อม

ถ้า p เป็นประพจน์ใด ๆ จะมีกรณีพิจารณาค่าความจริงของประพจน์เป็น 2 กรณี คือ p มีค่าความจริงเป็นจริง แทนด้วย T หรือเป็นเท็จ แทนด้วย F

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ใด ๆ ทั้ง p และ q มีค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จ ดังนั้น ถ้ามีสองประพจน์จะมีกรณีที่ต้องพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ 4 กรณี ได้ดังตารางค่าความจริงต่อไปนี้

กรณี	p	q
1	T	T
2	T	F
3	F	T
4	F	F

ตัวอย่าง 2.3 จงหาค่าความจริงของ $q \to (p \land q)$

วิธีทำ ค่าความจริงของ $q \to (p \land q)$ แสดงได้ดังตาราง

p	q	$p \land q$	$q \to (p \land q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	F
F	F	F	T

ตัวอย่าง 2.4 จงหาค่าความจริงของ $(p \wedge q) \to r$

วิธีทำ ค่าความจริงของ $(p \wedge q) \to r$ แสดงได้ดังตาราง

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

ข้อสังเกต ถ้ามีประพจน์ 1 ประพจน์ จะมีกรณีพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ 2 กรณี

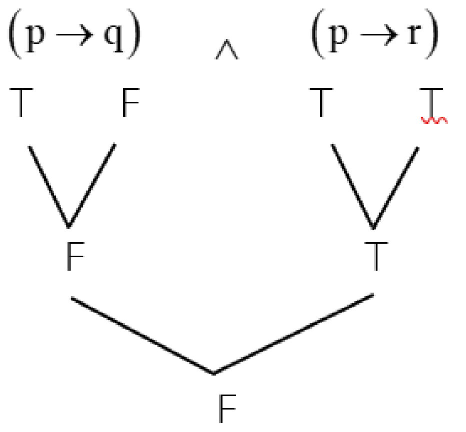
ถ้ามีประพจน์ 2 ประพจน์ จะมีกรณีพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ 4 กรณี

ถ้ามีประพจน์ 3 ประพจน์ จะมีกรณีพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ 8 กรณี

ในทำนองเดียวกันถ้ามีประพจน์ n ประพจน์ จะมีกรณีพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ 2^n กรณี เมื่อทราบค่าความจริงของประพจน์ย่อย สามารถหาค่าความจริงของประพจน์เชิงประกอบที่มีตัวเชื่อมหลายตัวได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.5 จงหาค่าความจริงของ $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ เมื่อกำหนดให้ประพจน์ p , q และ r มีค่าความจริงเป็น T , F และ T ตามลำดับ

วิธีทำ สร้างตารางค่าความจริงดังตัวอย่าง 2.4 จะได้ว่า $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ หรือใช้วิธีแทนค่าความจริงของประพจน์ลงในประโยคสัญลักษณ์แล้ววิเคราะห์หาผลสรุป ดังนี้

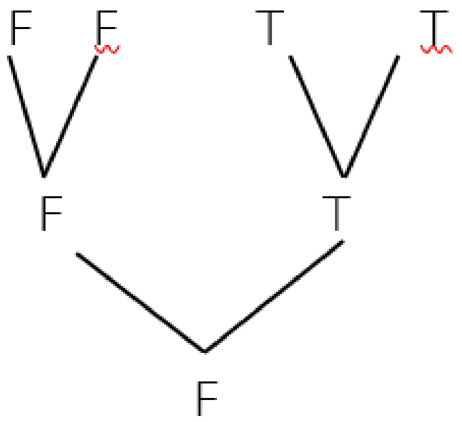


ดังนั้น ประพจน์ $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ตัวอย่าง 2.6 จงหาค่าความจริงของ $(p \vee q) \leftrightarrow [(\sim r) \rightarrow s]$ เมื่อกำหนดให้ประพจน์ p ,q ,r มีค่าความจริงเป็น “เท็จ” และ s มีค่าความจริงเป็น “จริง”

วิธีทำ แทนค่าความจริงของประพจน์ที่กำหนดจะได้

$$(p \vee q) \leftrightarrow [(\sim r) \rightarrow s]$$



ดังนั้น $(p \vee q) \leftrightarrow [(\sim r) \rightarrow s]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

บางครั้งการวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์ไม่จำเป็นต้องวิเคราะห์ให้ครบทุกขั้นตอนก็สามารถตอบได้ว่าประพจน์นั้นมีค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จ เพียงแค่ทราบค่าความจริงของประพจน์บางประพจน์ และผลสรุปของการเชื่อมด้วยตัวเชื่อมประพจน์ดังนี้

1.ประพจน์เชื่อมด้วย “และ” **เป็นเท็จเสมอ ถ้าประพจน์ที่นำมาเชื่อมประพจน์ใดประพจน์หนึ่งเป็นเท็จ**

2.ประพจน์เชื่อมด้วย “หรือ” **เป็นจริงเสมอ ถ้าประพจน์ที่นำมาเชื่อมประพจน์ใดประพจน์หนึ่งเป็นจริง**

3.ประพจน์เชื่อมด้วย “ถ้า...แล้ว...” **เป็นเท็จเมื่อประพจน์ตัวหน้าที่นำมาเชื่อมมีค่าความจริงเป็นจริงและประพจน์ตัวหลังที่นำมาเชื่อมมีค่าความจริงเป็นเท็จ**

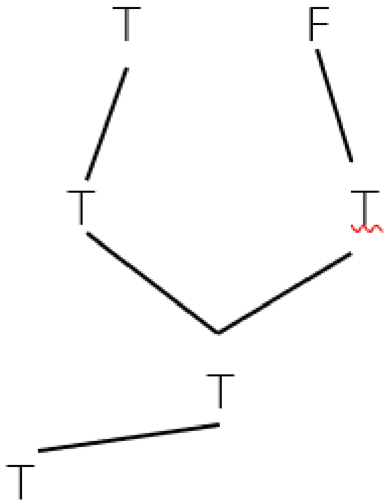
4.ประพจน์เชื่อด้วย “...ก็ต่อเมื่อ...” **เป็นจริงเสมอ เมื่อประพจน์ที่นำมาเชื่อมมีค่าความจริงเป็นจริงทั้งคู่หรือเป็นเท็จทั้งคู่**

นั้นคือการบางครั้งการวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์ไม่จำเป็นต้องวิเคราะห์ให้ครบทุกขั้นตอนก็สามารถตอบได้ว่าประพจน์นั้นมีค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จ ถ้าทราบค่าความจริงของประพจน์บางประพจน์

ตัวอย่าง 2.7 จงหาค่าความจริงของประพจน์ $r \vee [(q \to p) \wedge (s \to r)]$ เมื่อกำหนดให้ p และ s มีค่าความจริงเป็น “T” และ “F” ตามลำดับ

วิธีทำ

$$r \vee [(q \to p) \wedge (s \to r)]$$



ดังนั้น ประพจน์ $r \vee [(q \to p) \wedge (s \to r)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ในทางกลับกันหากทราบค่าความจริงของประพจน์รวมทั้งหมดก็สามารถหาค่าความจริงของแต่ละประพจน์ย่อยได้ดังนี้

ตัวอย่าง 2.8 กำหนดให้ $p \wedge \left[\left(p \to \sim r \right) \wedge \left(q \to r \right) \right]$ มีค่าความจริงเป็นจริง จงหาค่าความจริงของประพจน์ p , q และ r

วิธีทำ เนื่องจาก $p \wedge \left[\left(p \to \sim r \right) \wedge \left(q \to r \right) \right]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

แสดงว่า p และ $\left[\left(p \to \sim r \right) \wedge \left(q \to r \right) \right]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

นั้นคือ $\left(p \to \sim r \right)$ และ $\left(q \to r \right)$ มีค่าความจริงเป็นจริงด้วย

ดังนั้น p มีค่าความจริงเป็น “จริง”

q มีค่าความจริงเป็น “เท็จ”

r มีค่าความจริงเป็น “เท็จ”

จากข้างต้นอาจสรุปได้ว่า การหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อมนั้นสามารถใช้ตารางแสดงค่าความจริงโดยแทนค่าความจริงตามตัวเชื่อมที่กำหนด และบางกรณีสามารถแทนค่าความจริงของประพจน์เชิงเดี่ยวที่กำหนดเพื่อหาค่าความจริงของประพจน์เชิงประกอบได้

สมมูล นิเสธ และสัจนิรันดร์

บางครั้งการเชื่อมประพจน์หลายประพจน์แล้วหาค่าความจริงพบว่ามีค่าความจริงเป็นจริงบ้างเป็นเท็จบ้าง บางครั้งมีค่าความจริงเป็นเท็จทุกกรณี แต่ถ้าค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณีเรียกว่า “สัจนิรันดร์” โดยมีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม 2.4 สัจนิรันดร์ (tautology) คือประพจน์เชิงประกอบที่มีค่าความจริงเป็นจริงทุกค่าความจริงของประพจน์เชิงเดี่ยวที่นำมาเชื่อมกัน

ตัวอย่าง 2.9 จงแสดงว่า $p \rightarrow (p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์

วิธีทำ ถ้า $p \rightarrow (p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์ แสดงว่ามีค่าความจริงเป็นจริงทุกค่าของประพจน์ย่อย จึงหาค่าความจริงทุกค่าของประพจน์ย่อยจากตารางค่าความจริง ดังตาราง

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

เป็นจริงทุกกรณี

จากตารางค่าความจริงพบว่าค่าความจริงของ p หรือ q จะมีค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จ จะได้ $p \rightarrow (p \vee q)$ มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณี

ดังนั้น $p \rightarrow (p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์

การตรวจสอบโดยใช้ข้อขัดแย้งตามรูปแบบของประพจน์ที่เกิดจากตัวเชื่อมดังนี้

1. รูปแบบเชื่อมด้วย “$\vee$”ด้วยพิจารณารูปแบบ $p \vee q$พบว่าเป็นเท็จกรณีเดียวเท่านั้นคือ p มีค่าความจริงเป็นเท็จ และ q มีค่าความจริงเป็นเท็จ ดังนั้นในการตรวจสอบโดยใช้ข้อขัดแย้งทำได้โดยกำหนดให้ผลสุดท้ายมีค่าความจริงเป็น เท็จ และค่าความจริงของประพจน์ที่อยู่ทางซ้ายและขวาของตัวเชื่อม “$\vee$”เป็นเท็จทั้งคู่ ทำให้เกิดข้อขัดแย้งหรือไม่ ถ้าเกิดการข้อขัดแย้งขึ้นแสดงว่าที่กำหนดให้ผลสุดท้ายมีค่าความจริงเป็น เท็จ นั้นไม่ถูกต้องจึงเป็นสัจนิรันดร์

2. รูปแบบเชื่อมด้วย “ $\rightarrow$” ด้วยพิจารณารูปแบบ $p \rightarrow q$ พบว่าเป็นเท็จกรณีเดียวเท่านั้นคือ p มีค่าความจริงเป็นจริง และ q มีค่าความจริงเป็นเท็จ ดังนั้นในการตรวจสอบโดยใช้ข้อขัดแย้งทำได้โดยกำหนดให้ผลสุดท้ายมีค่าความจริงเป็น เท็จ และค่าความจริงของประพจน์ที่อยู่ทางซ้ายและขวาของตัวเชื่อม “$\rightarrow$” เป็นจริงและเท็จตามลำดับ ทำให้เกิดข้อขัดแย้งหรือไม่ ถ้าเกิดการข้อขัดแย้งขึ้นแสดงว่าที่กำหนดให้ผลสุดท้ายมีค่าความจริงเป็น เท็จ นั้นไม่ถูกต้องจึงเป็นสัจนิรันดร์

การตรวจสอบโดยใช้ข้อขัดแย้งตามรูปแบบของประพจน์ที่เกิดจากตัวเชื่อมดังนี้

3. รูปแบบเชื่อมด้วย “ $\leftrightarrow$” ด้วยพิจารณารูปแบบ $p \leftrightarrow q$ พบว่าเป็นเท็จกรณีที่ค่าความจริงของ p และ q มีค่าความจริงตรงข้ามกัน ดังนั้นในการตรวจสอบโดยใช้ข้อขัดแย้งทำได้โดยกำหนดให้ผลสุดท้ายมีค่าความจริงเป็น เท็จ และค่าความจริงของประพจน์ที่อยู่ทางซ้ายและขวาของตัวเชื่อม “$\leftrightarrow$” เป็นตรงข้ามกันทั้งคู่ ทำให้เกิดข้อขัดแย้งหรือไม่ ถ้าเกิดการข้อขัดแย้งขึ้นแสดงว่าที่กำหนดให้ผลสุดท้ายมีค่าความจริงเป็น เท็จ นั้นไม่มีโอกาสเกิดขึ้น จึงเป็นสัจนิรันดร์

ตัวอย่าง 2.10 จงแสดงว่า $p \leftrightarrow (p \wedge q)$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์

วิธีทำ (1) สร้างตารางค่าความจริงได้ดังนี้

p	q	$p \wedge q$	$p \leftrightarrow (p \wedge q)$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	T
F	F	F	T

จากตารางค่าความจริงพบว่าบรรทัดที่ 2 เมื่อ p มีค่าความจริงเป็น T และ q มีค่าความจริงเป็น F จะเห็นว่า $p \leftrightarrow (p \wedge q)$ มีค่าความจริง เป็น F

แสดงว่า $p \leftrightarrow (p \wedge q)$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์

ตัวอย่าง 2.10 จงแสดงว่า $p \leftrightarrow (p \wedge q)$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์

วิธีทำ (2) เมื่อใช้การวิเคราะห์ กรณีประโยคที่เชื่อด้วย มีค่าความจริงเป็นเท็จเมื่อค่าความจริงของประพจน์ทั้งสองไม่เหมือนกัน

พิจารณาจาก ให้ p มีค่าความจริงเป็นจริง q มีค่าความจริงเป็น F

พบว่า มีค่าความจริงเป็น F

จะได้ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

นั่นคือ ไม่เป็นสัจนิรันดร์

ตัวอย่าง 2.11 จงแสดงว่า $p \rightarrow (p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์

วิธีทำ (โดยวิธีใช้ข้อขัดแย้ง) กำหนดให้ค่าความจริงของ $p \rightarrow (p \vee q)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

จะได้ว่า p มีค่าความจริงเป็น จริง และ $p \vee q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

แสดงว่า p มีค่าความจริงเป็นเท็จ ซึ่งเกิดการขัดแย้ง

ดังนั้น $p \rightarrow (p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์

ตัวอย่างของสัจนิรันดร์ เมื่อกำหนดให้ p , q , r เป็นประพจน์ใด ๆ

1. $p \to p \vee q$	กฎของการเติม
2. $p \wedge q \to p$	กฎการทำให้ง่าย
3. $p \wedge (p \to q) \to q$	กฎการแจงผลตามเหตุ
4. $\sim q \wedge (p \to q) \to \sim p$	กฎการแจงผลค้านเหตุ
5. $p \to q \leftrightarrow \sim q \to \sim p$	กฎของข้อความแย้งสลับที่
6. $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$	กฎของตรรกบท
7. $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$	กฎของเดอร์มอร์กอง
$\sim (p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$	
8. $\sim p \wedge (q \wedge \sim q) \to p$	
9. $(p \to q) \wedge (q \to r) \leftrightarrow (p \vee q \to r)$	กฎการอนุมาน
10. $p \vee (q \vee r) \leftrightarrow (p \vee q) \vee r$	กฎการเปลี่ยนกลุ่ม
$p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$	

ตัวอย่างของสัจนิรันดร์ เมื่อกำหนดให้ p , q , r เป็นประพจน์ใด ๆ

11. $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$ กฎการสลับที่

    $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$

12. $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ กฎการแจกแจง

    $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

13. $\sim(\sim p) \leftrightarrow p$ กฎทวีคูณนิเสธ

14. $\sim p \wedge (p \vee q) \rightarrow p$ กฎตรรกบทแบบคัดลอก

15. $(p \rightarrow q \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$ กฎของการเป็นไปไม่ได้

16. $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee r)$

17. $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge r)$

18. $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow q \wedge r)$

ตัวอย่างของสัจนิรันดร์ เมื่อกำหนดให้ p , q , r เป็นประพจน์ใด ๆ

19. $p \to q \leftrightarrow \sim p \vee q$	กฎรูปแบบการสมมูลของการแจกแจงเหตุสู่ผล
20. $\sim(p \to q) \leftrightarrow p \wedge \sim q$	กฎนิเสธของการแจงเหตุสู่ผล
21. $p \vee \sim p$	กฎการไม่มีตรงกลาง
22. $[p \wedge q \to r] \leftrightarrow [p \to (q \to r)]$	
23. $\sim(p \wedge \sim p)$	กฎของความขัดแย้ง
24. $p \vee p \leftrightarrow p$	
25. $p \wedge p \leftrightarrow p$	

บทนิยาม 2.5 ให้ p และ q เป็นประพจน์ เรากล่าวว่า p และ q เป็นนิเสธ ของกันและกัน ก็ต่อเมื่อประพจน์ทั้งสองมีค่าความจริงตรงกันข้ามกัน

พิจารณาค่าความจริงของประพจน์ $(p \to q)$ และ $(p \wedge \sim q)$

p	q	$p \to q$	$p \wedge \sim q$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	F

จะเห็นว่า $(p \to q)$ และ $(p \wedge \sim q)$ มีค่าความจริงตรงกันข้ามซึ่งต่อไปเราจะเรียกประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงกันข้ามว่าเป็นนิเสธกัน โดยมีบทนิยามดังนี้

ตัวอย่าง 2.12 จงพิจารณาว่าประพจน์ต่อไปนี้เป็นนิเสธกันหรือไม่

1. $p \wedge q$ และ $\sim(p \wedge q)$
2. $p \wedge q$ และ $\sim p \vee \sim q$

วิธีทำ สร้างตารางค่าความจริง $p \wedge q$, $\sim(p \wedge q)$ และ $\sim p \vee \sim q$

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

จากตารางค่าความจริงของประพจน์

จะได้ $p \wedge q$ เป็นนิเสธของ $\sim(p \wedge q)$

และ $p \wedge q$ และเป็นนิเสธของ $\sim p \vee \sim q$

ตัวอย่าง 2.13 จงแสดงว่า $p \to q$ และ $p \wedge \sim q$ เป็นนิเสธกัน

วิธีทำ จากประพจน์ที่กำหนดให้ สร้างตารางค่าความจริงได้ดังนี้

p	q	$p \to q$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	F

ค่าความจริงตรงกันข้ามทุกกรณี กรณีต่อกรณี

แสดงว่า $(p \to q)$ เป็นนิเสธกับ $(p \wedge \sim q)$

ตัวอย่าง 2.14 จงแสดงว่านิเสธของ $p \rightarrow q$ คือ $p \wedge \sim q$

วิธีทำ เนื่องจาก $p \rightarrow q \leftrightarrow \sim p \vee q$ เป็นสัจนิรันดร์

และ $\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim(\sim p \vee q)$

$\leftrightarrow p \wedge \sim q$

นั่นคือ $p \rightarrow q$ เป็นนิเสธของ $p \wedge \sim q$

การสมมูลเชิงตรรกศาสตร์

ในการหาค่าความจริงของประพจน์เชิงประกอบบางครั้งพบว่ารูปแบบของประพจน์เชิงประกอบไม่เหมือนกันแต่มีค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณีจะกล่าวว่าประพจน์เชิงประกอบทั้งสองสมมูลกัน โดยนิยามดังนี้

บทนิยาม 2.6 ประพจน์เชิงประกอบสองประพจน์จะสมมูลกันก็ต่อเมื่อประพจน์ทั้งสองมีค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณี

บทนิยาม 2.7 ให้ p และ q เป็นประพจน์ เรากล่าวว่า p และ q สมมูลกันเชิงตรรกศาสตร์ก็ต่อเมื่อประพจน์ทั้งสองมีค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณี กรณีต่อกรณี ถ้า p และ q สมมูล กันเชิงตรรกศาสตร์จะเขียนแทน $\mathbf{p} \equiv \mathbf{q}$ ด้วย

ตัวอย่าง 2.15 จงแสดงว่า $p \to q$ และ $\sim q \to \sim p$ เป็นนิเสธกัน

วิธีทำ จากตารางค่าความจริงของ $p \to q$ และ $\sim q \to \sim p$

p	q	$p \to q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \to \sim p$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

พบว่า $p \to q$ และ $\sim q \to \sim p$ มีค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณี

นั้นคือ $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$

ตัวอย่างของประพจน์ที่สมมูลกัน

เมื่อกำหนดให้ p , q , r เป็นประพจน์ใด ๆ

t เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณี

f เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จทุกกรณี

1. $\sim(\sim p) \equiv p$
2. $p \equiv p \vee p$
3. $p \equiv p \wedge p$
4. $p \vee q \equiv q \vee p$
5. $p \wedge q \equiv q \wedge p$
6. $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$
7. $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r)$
8. $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r)$

ตัวอย่างของประพจน์ที่สมมูลกัน

9. $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
10. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
11. $p \to (q \wedge r) \equiv (p \to q) \wedge (p \to r)$
12. $p \to (q \vee r) \equiv (p \to q) \vee (p \to r)$
13. $(p \wedge q) \to r \equiv (p \to q) \vee (p \to r)$
14. $(p \vee q) \to r \equiv (p \to q) \wedge (p \to r)$
15. $p \to q \equiv \sim p \vee q$
16. $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$
17. $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$
18. $p \vee t \equiv t$
19. $p \vee f \equiv p$
20. $p \wedge t \equiv p$
21. $p \wedge f \equiv f$

ตัวอย่าง 2.16 จงหานิเสธของ $(p \to \sim q) \wedge r$

วิธีทำ นิเสธของ $(p \to \sim q) \wedge r$ แทนด้วย $\sim[(p \to \sim q) \wedge r]$

จะได้ $\sim[(p \to \sim q) \wedge r] \equiv \sim[(\sim p \vee q) \wedge r]$

$\equiv \sim(\sim p \vee q) \vee \sim r$

$\equiv \sim(\sim p \vee q) \vee \sim r$

$\equiv (p \wedge \sim q) \vee \sim r$

ดังนั้น นิเสธของ $(p \to \sim q) \wedge r$ คือ $(p \wedge \sim q) \vee \sim r$

การอ้างเหตุผล

การให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์แบ่งเป็น 2 ส่วนคือ ส่วนที่เป็นเหตุหรือสิ่งที่กำหนดให้ และส่วนที่เป็นข้อสรุปหรือผล แล้วถึงการสมเหตุสมผล(valid) หรือ ไม่สมเหตุสมผล(invalid) โดยมีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม 2.8 การให้เหตุผลคือ การอ้างว่าจากเหตุ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ สามารถสรุปผล q

บทนิยาม 2.9 การให้เหตุผลที่ประกอบด้วย $p_1, p_2, \ldots, p_n$ และ ข้อสรุป q จะสมเหตุสมผล ก็ต่อเมื่อ $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์

ตัวอย่าง 2.17 จงพิจารณาการให้เหตุผลสมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. ถ้าฝนตกแล้วถนนเลื่อน

2. ฝนตก

ผลสรุป ถนนเลื่อน

วิธีทำ กำหนดให้ p แทน ฝนตก และ q แทน ถนนเลื่อน

จะได้ **เหตุ** 1. $p \rightarrow q$

2. p

ผลสรุป q

นำเหตุทุกเหตุเชื่อมด้วยตัวเชื่อม "และ" และเชื่อมกับผลสรุปด้วย "ถ้า...แล้ว..." จะได้

$$\left[(p \rightarrow q) \wedge p\right] \rightarrow q$$

ตัวอย่าง 2.17 จงพิจารณาการให้เหตุผลสมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. ถ้าฝนตกแล้วถนนเลื่อน

2. ฝนตก

ผลสรุป ถนนเลื่อน

วิธีทำ และสร้างตารางค่าความจริงได้ดังนี้

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$[(p \to q) \wedge p] \to q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

จากตารางพบว่าเป็นจริงทุกกรณีแสดงว่า $[(p \to q) \wedge p] \to q$ เป็นสัจนิรันดร์

ดังนั้นผลสรุปคือ q หรือ ถนนเลื่อน นั่นคือ การให้เหตุผลนี้สมเหตุสมผล

ตัวอย่าง 2.18 จงพิจารณาการให้เหตุผลสมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. ถ้าแดงดื่มกาแฟแล้วแดงรู้สึกกระชับกระเฉง

2. แดงรู้สึกกระชับกระเฉง

ผลสรุป แดงดื่มกาแฟ

วิธีทำ กำหนดให้ p แทน แดงดื่มกาแฟ q แทนแดงรู้สึกกระชับกระเฉง

เขียนสิ่งที่กำหนดให้ในรูปสัญลักษณ์ ได้ดังนี้

เหตุ 1. $p \to q$

2. q

ผลสรุป p

นำเหตุทั้งสองเชื่อมด้วย "และ" และเชื่อมกับผลสรุปด้วย "ถ้า...แล้ว..." จะได้

ประโยคสัญลักษณ์ $\left[(p \to q) \wedge p\right] \to q$

ตัวอย่าง 2.18 จงพิจารณาการให้เหตุผลสมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. ถ้าแดงดื่มกาแฟแล้วแดงรู้สึกกระชับกระเฉง

2. แดงรู้สึกกระชับกระเฉง

ผลสรุป แดงดื่มกาแฟ

วิธีทำ และสร้างตารางค่าความจริงได้ดังนี้

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge q$	$[(p \to q) \wedge q] \to p$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

จากตารางค่าความจริงจะได้ว่า $[(p \to q) \wedge p] \to q$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์

ดังนั้น การให้เหตุผลนี้ ไม่สมเหตุสมผล

ต่อไปนี้เป็นรูปแบบของการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผล นำไปใช้เป็น**กฎอ้างอิง (rules of inference)** ดังนี้

1.การแจงผลตามเหตุ(modus ponens)

เหตุ 1. $p \to q$

2. p

ผล q

2.การแจงผลค้านเหตุ(modus tollens)

เหตุ 1. $p \to q$

2. $\sim q$

ผล $\sim p$

3.ตรรกบทแบบสมมติฐาน(hypothetical syllogism)

เหตุ 1. $p \to q$

2. $q \to r$

ผล $p \to r$

4.ตรรกบทแบบคัดออก(disjunctive syllogism)

เหตุ 1. $p \vee q$

2. $\sim p$

ผล q

5.การเลือกผลตามเหตุ(constructive dilemma)

เหตุ 1. $p \to q$

2. $r \to s$

3. $p \vee r$

ผล $q \vee s$

6.การเลือกปฏิเสธ(destructive dilemma)

เหตุ 1. $p \to q$

2. $r \to s$

3. $\sim q \vee \sim s$

ผล $\sim p \vee \sim r$

7.การแจงผลร่วม(simplification)

เหตุ 1. $p \wedge q$

ผล p , q

8.การเติมผล(addition)

เหตุ 1. p

ผล $p \vee q$

ตัวอย่าง 2.19 จงพิจารณาการให้เหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. $p \rightarrow q$

2. $\sim p \rightarrow r$

3. $\sim q$

ผลสรุป r

วิธีทำ

ข้อความ	เหตุผล
1. $p \rightarrow q$	กำหนดให้
2. $\sim p \rightarrow r$	กำหนดให้
3. $\sim q$	กำหนดให้
4. $\sim p$	จากข้อ 1,3 การแจงผลค้านเหตุ
5. r	จากข้อ 2,4 การแจงผลตามเหตุ

ดังนั้น การให้เหตุผลนี้สมเหตุสมผล

ตัวอย่าง 2.20 จงพิจารณาการให้เหตุผลสมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. $p \to q$

2. $\sim r \to s$

3. $q \to r$

4. $\sim s$

ผลสรุป $\sim p$

วิธีทำ

ข้อความ	เหตุผล
1. $p \to q$	กำหนดให้
2. $\sim r \to s$	กำหนดให้
3. $q \to r$	กำหนดให้
4. $\sim s$	กำหนดให้
5. $p \to r$	จากข้อ 1,3 ตรรกบทแบบสมมติฐาน
6. $\sim r$	จากข้อ 2,4 ตรรกบทแบบคัดออก
7. $\sim p$	จากข้อ 5,6 การแจงผลค้านเหตุ

ดังนั้น การให้เหตุผลนี้สมเหตุสมผล

ตัวอย่าง 2.21 จงพิจารณาการให้เหตุผลลมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1.อนุชาติเรียนคณิตศาสตร์หรือไพลินเรียนสังคม

2.ถ้าอนุชาติเรียนคณิตศาสตร์แล้วโยธินเรียนคณิตศาสตร์ด้วย

3.ไพลินไม่เรียนสังคม

ผลสรุป โยธินเรียนคณิตศาสตร์

วิธีทำ ให้ p แทนอนุชาติเรียนคณิตศาสตร์

q แทนไพลินเรียนสังคม

r แทนโยธินเรียนคณิตศาสตร์

เขียนสิ่งที่กำหนดให้ในรูปสัญลักษณ์ ได้ดังนี้

เหตุ 1. $p \vee q$

2. $p \rightarrow r$

3. $\sim q$

ผลสรุป r

ตัวอย่าง 2.21 จงพิจารณาการให้เหตุผลลมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1.อนุชาติเรียนคณิตศาสตร์หรือไพลินเรียนสังคม

2.ถ้าอนุชาติเรียนคณิตศาสตร์แล้วโยธินเรียนคณิตศาสตร์ด้วย

3.ไพลินไม่เรียนสังคม

ผลสรุป โยธินเรียนคณิตศาสตร์

วิธีทำ

ข้อความ	เหตุผล
1. $p \vee q$	กำหนดให้
2. $p \rightarrow r$	กำหนดให้
3. $\sim q$	กำหนดให้
4. p	จากข้อ 1,3 ตรรกบทแบบคัดออก
5. r	จากข้อ 2,4 การแจงผลตามเหตุ

ดังนั้น การให้เหตุผลนี้สมเหตุสมผล

ตัวอย่าง 2.22 จงพิจารณาการให้เหตุผลลมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1.ไมตรีไปห้องสมุดแล้วนุชไปว่ายน้ำ

2.วิทวัสไม่ดูละคร

3.ถ้าไมตรีไม่ไปห้องสมุดแล้วพลอยไม่ไปซื้อของ

4.พลอยไปซื้อของหรือวิทวัสดูละคร

ผลสรุป พลอยไปซื้อของและนุชไปว่ายน้ำ

วิธีทำ ให้ p แทนไมตรีไปว่ายน้ำ

q แทนนุชไปว่ายน้ำ

r แทนวิทวัสดูละคร

s แทนพลอยไปซื้อของ

เขียนสิ่งที่กำหนดให้ในรูปสัญลักษณ์ ได้ดังนี้

เหตุ 1. $p \rightarrow q$

2. $\sim r$

3. $\sim p \rightarrow \sim s$

4. $s \vee r$

ผลสรุป $s \wedge q$

ตัวอย่าง 2.22 จงพิจารณาการให้เหตุผลลมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1.ไมตรีไปห้องสมุดแล้วนุชไปว่ายน้ำ

2.วิทวัสไม่ดูละคร

3.ถ้าไมตรีไม่ไปห้องสมุดแล้วพลอยไม่ไปซื้อของ

4.พลอยไปซื้อของหรือวิทวัสดูละคร

ผลสรุป พลอยไปซื้อของและนุชไปว่ายน้ำ

วิธีทำ

ข้อความ	เหตุผล
1. $p \to q$	กำหนดให้
2. $\sim r$	กำหนดให้
3. $\sim p \to \sim s$	กำหนดให้
4. $s \vee r$	กำหนดให้
5. s	จากข้อ 2,4 ตรรกบทแบบคัดออก
6. p	จากข้อ 3,5 กฎของข้อความแย้งสลับที่
7. q	จากข้อ 1,6 การแจงเหตุตามผล
8. $s \wedge q$	จากข้อ 5,7

ดังนั้น การให้เหตุผลนี้สมเหตุสมผล

ประโยคเปิด

บางครั้งเมื่ออ่านประโยคจบแล้วไม่สามารถบอกได้ว่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จ เช่น เขาเป็นประธานห้อง หรือ $2x+5=1$ ประโยคที่มีตัวแปรและไม่สามารถบอกค่าความจริงได้ว่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จ จนกว่าจะแทนค่าตัวแปรในประโยคนั้น จะเรียกว่า ประโยคเปิด และจะใช้ $P(x), Q(x), R(x), \ldots$ แทน ประโยคเปิดที่มี x เป็นตัวแปร

วลีบ่งปริมาณและการหาค่าความจริง
ของประพจน์ที่มีวลีบ่งปริมาณ

1. **วลีบ่งปริมาณ (quantifier)** ในทางตรรกศาสตร์ ใช้ ใน 2 ลักษณะ คือ บอกปริมาณเป็นจำนวนที่แน่นอน เช่น นักศึกษา 45 คน นกแก้ว 15 ตัว เครื่องจักร 10 เครื่อง และบอกปริมาณเป็นจำนวนมากน้อย เช่น นักศึกษาทุกคน จำนวนเต็มบางจำนวน เป็นต้น โดยเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ดังนี้

1.1 วลีบ่งปริมาณทั้งหมด หมายถึง ทุกสิ่งทุกอย่างในเอกภพสัมพัทธ์ที่กล่าวถึงมักใช้คำว่า “ทั้งหมด” “ทุกๆ” หรือ “แต่ละ” เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ “ $\forall$”

1.2 วลีบ่งปริมาณบางตัว หมายถึง บางสิ่งบางอย่างในเอกภพสัมพัทธ์ที่กล่าวถึง มักใช้คำว่า “บางอย่าง” “บางสิ่ง” เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ “ $\exists$”

การใช้สัญลักษณ์แทนวลีบ่งปริมาณต้องใช้ควบคู่กับประโยคเปิด เช่น

กำหนดข้อความ “**สำหรับ x ทุกตัวถ้า x เป็นจำนวนเต็มแล้ว x เป็นจำนวนจริง**”

จากข้อความข้างต้น ถ้าขอบเขตของข้อความที่กล่าวถึงคือ เซตของจำนวนเต็ม

แทนด้วยสัญลักษณ์ $\forall x[x \in \mathbb{Z} \rightarrow x \in \mathbb{R}]$

หรือกำหนดข้อความ “**จำนวนเต็มทุกจำนวนเป็นจำนวนตรรกยะ**”

จากข้อความข้างต้น ถ้าขอบเขตของข้อความที่กล่าวถึงคือเซตของจำนวนเต็ม

ให้ P(x) แทน x เป็นจำนวนตรรกยะ สัญลักษณ์แทนข้อความ คือ $\forall x[P(x)]$

แต่ถ้าขอบเขตของสิ่งที่กล่าวถึงคือเซตของจำนวนจริง สัญลักษณ์แทนข้อความคือ

$\forall x$ [x เป็นจำนวนเต็ม แล้ว x เป็นจำนวนตรรกยะ]

ต่อไปจะเรียกเซตของขอบเขตของสิ่งที่กล่าวถึงว่า เอกภพสัมพัทธ์ แทนด้วย U บางครั้งอาจเขียนเอกภพสัมพัทธ์กำกับไว้ด้วย ดังนี้

$\forall x \in \mathbb{R}$ [x เป็นจำนวนเต็ม $\rightarrow$ x เป็นจำนวนตรรกยะ]

ตัวอย่าง 2.23 จงเขียนประพจน์"สำหรับ x ทุกตัว x เป็นจำนวนเต็ม แล้ว x เป็นจำนวนตรรกยะ" ต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์

วิธีทำ ให้ P(x) แทน x เป็นจำนวนเต็ม แล้ว x เป็นจำนวนตรรกยะ

ประพจน์ "**สำหรับ x ทุกตัว x เป็นจำนวนเต็ม แล้ว x เป็นจำนวนตรรกยะ**"

เขียนแทนด้วย $\forall x P(x)$ หรือ $\forall x$[x เป็นจำนวนเต็ม แล้ว x เป็นจำนวนตรรกยะ]

หรือ $\forall x\left[x \in \mathbb{Z} \rightarrow x \in \mathbb{Q}\right]$

2.การหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีวลีบ่งปริมาณ โดยมีบทนิยามดังนี้ ประพจน์ที่มีวลีบ่งปริมาณสามารถหาค่าความจริงเช่นประพจน์ทั่วไป โดยมีนิยามดังนี้

บทนิยาม 2.10 $\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริงก็ต่อเมื่อ นำค่าทุกค่าในเอกภพสัมพัทธ์แทนค่าในตัวแปร x แล้วทำให้ P(x) เป็นจริงเสมอ

$\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จก็ต่อเมื่อ นำค่าทุกค่าในเอกภพสัมพัทธ์แทนค่าในตัวแปร x แล้วมี x อย่างน้อยหนึ่งค่าที่ทำให้ P(x) เป็นเท็จ

ตัวอย่าง 2.24 กำหนด $P(x): x+2>5$ และ $U=\{4,5,6\}$

จงพิจารณาว่า $\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จ

วิธีทำ พิจารณา $P(x): x+2>5$

$P(4): 4+2>5$ เป็นจริง

$P(5): 5+2>5$ เป็นจริง

$P(6): 6+2>5$ เป็นจริง

จะเห็นว่า $x \in U$ ทำให้ $P(x)$ มีค่าความจริงเป็นจริงทั้งหมด

ดังนั้น $\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ตัวอย่าง 2.25 กำหนด $P(x): x+2<5$ และ $U=\{1,2,4\}$

จงพิจารณาว่า $\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จ

วิธีทำ พิจารณา $P(x): x+2<5$

$P(1): 1+2<5$ เป็นจริง

$P(2): 2+2<5$ เป็นจริง

$P(4): 4+2<5$ เป็นเท็จ

จะเห็นว่า $P(4)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ดังนั้น $\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

บทนิยาม 2.11 $\exists x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จก็ต่อเมื่อ นำค่าทุกค่าในเอกภพสัมพัทธ์ แทนค่าในตัวแปร x แล้วทำให้ P(x) เป็นเท็จ

$\exists x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริงก็ต่อเมื่อ นำค่าทุกค่าในเอกภพสัมพัทธ์ แทนค่าในตัวแปร x แล้วมี x อย่างน้อยหนึ่งค่าที่ทำให้ P(x) เป็นจริง

ตัวอย่าง 2.26 จงพิจารณาว่า $\exists x[x-1<0]$ เมื่อ $U=\{-1,0,1\}$ มีค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จ

วิธีทำ พิจารณา $P(x): x-1<0$

$P(-1): -1-1<0$ เป็นจริง

$P(0): 0-1<0$ เป็นจริง

$P(1): 1-1<0$ เป็นเท็จ

จะเห็นว่า $P(-1)$ และ $P(0)$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ดังนั้น $\exists x[x-1<0]$ เมื่อ $U=\{-1,0,1\}$ มีค่าความจริงเป็นจริง

นิเสธของประพจน์ที่มีวลีบ่งปริมาณ

นิเสธของประพจน์ที่มีวลีบ่งปริมาณ คือประพจน์ที่มีค่าความจริงที่ตรงกันข้ามของประพจน์ที่มีวลีบ่งปริมาณนั้น

กำหนดประพจน์ที่มีวลีบ่งปริมาณ เช่น $\forall x[P(x)]$ หรือ $\exists x[P(x)]$ นิเสธของ $\forall x[P(x)]$ เขียนแทนด้วย $\sim\forall x[P(x)]$ ซึ่ง $\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงตรงกันข้ามกับ $\sim\forall x[P(x)]$ และนิเสธของ $\exists x[P(x)]$ เขียนแทนด้วย $\sim\exists x[P(x)]$ ซึ่ง $\sim\exists x[P(x)]$ มีค่า $\exists x[P(x)]$ ความจริงตรงกันข้ามกับ

บทนิยาม 2.12 นิเสธของ $\forall x[P(x)]$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sim\forall x[P(x)]$ หมายถึงประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงข้ามกับ $\forall x[P(x)]$

บทนิยาม 2.13 นิเสธของ $\exists x[P(x)]$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sim\exists x[P(x)]$ หมายถึงประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงข้ามกับ $\exists x[P(x)]$

การหานิเสธของประพจน์ที่มีวลีบ่งปริมาณ คือการหาประพจน์ที่มีค่าความจริงที่ตรงกันข้ามของประพจน์ที่มีวลีบ่งปริมาณนั้น

พิจารณาค่าความจริงของ $\sim \forall x[P(x)]$ และ $\sim \exists x[P(x)]$ จะได้ว่า

ถ้า $\sim \forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง จะได้ $\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ นั่นคือ มี $a \in \cup$ ซึ่ง $P(a)$ เป็นเท็จ จะได้ $\sim P(a)$ เป็นจริง นั่นคือ $\exists x \sim [P(x)]$ เป็นจริง

และถ้า $\sim \forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ จะได้ $\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริงแสดงว่าเมื่อแทน x ด้วยสมาชิก a ใดๆใน $\cup$ จะได้ $P(a)$ เป็นจริง นั่นคือ $\sim P(a)$ เป็นเท็จ นั่นคือ $\exists x \sim [P(x)]$ เป็นเท็จ

ดังนั้น $\sim \forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเหมือนกันกับค่าความจริงของ $\exists x \sim [P(x)]$ นั่นคือ $\sim \forall x[P(x)] \leftrightarrow \exists x \sim [P(x)]$ จะได้นิเสธของ $\forall x[P(x)]$ คือ $\exists x \sim [P(x)]$

และในทำนองเดียวกันจะพบว่า

นิเสธของ $\exists x[P(x)]$ คือ $\forall x \sim [P(x)]$

นิเสธของ $\exists x \sim [P(x)]$ คือ $\forall x[P(x)]$

นิเสธของ $\forall x \sim [P(x)]$ คือ $\exists x[P(x)]$

ตัวอย่าง 2.26 จงหานิเสธของ $\exists x[x+2 \neq 4]$

วิธีทำ นิเสธของ $\exists x[x+2 \neq 4]$

เนื่องจาก $\sim \exists x[x+2 \neq 4] \leftrightarrow \forall x \sim [x+2 \neq 4]$

$\leftrightarrow \forall x[x+2 = 4]$

ดังนั้น นิเสธของ $\exists x[x+2 \neq 4]$ คือ $\forall x[x+2 = 4]$

ตัวอย่าง 2.27 จงหานิเสธของ $\forall x[x < 3 \wedge x = -2]$

วิธีทำ นิเสธของ $\forall x[x < 3 \wedge x = -2]$

เนื่องจาก $\sim \forall x[x < 3 \wedge x = -2] \leftrightarrow \exists x \sim [x < 3 \wedge x = -2]$

$\leftrightarrow \exists x[x \geq 3 \vee x \neq -2]$

ดังนั้น นิเสธของ $\forall x[x < 3 \wedge x = -2]$ คือ $\exists x[x \geq 3 \vee x \neq -2]$

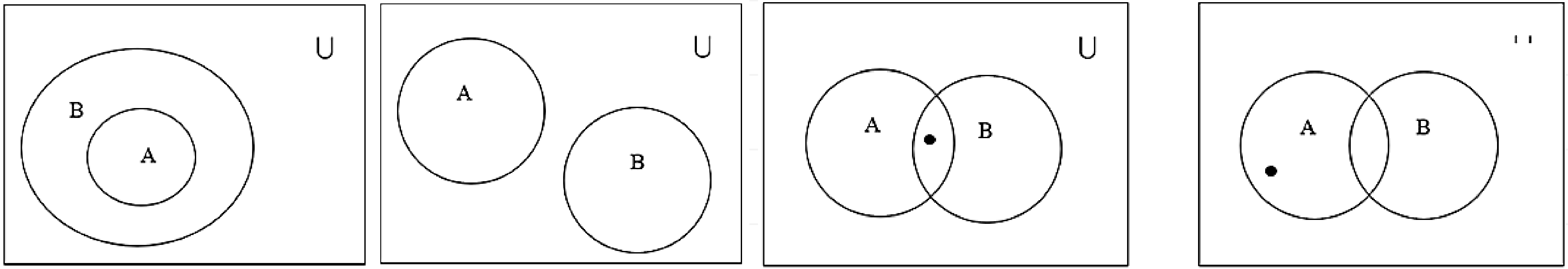
การตรวจสอบความสมเหตุสมผล
โดยใช้แผนภาพของเวนน์-ออยเลอร์

การตรวจสอบความสมเหตุสมผลนอกจากการพิจารณาโดยการนำเอาแต่ละเหตุและผลมาเชื่อมกันด้วยตัวเชื่อม “ถ้า...แล้ว...” และเหตุทุกเหตุที่กำหนดให้เชื่อมด้วยตัวเชื่อม “และ” ถ้าแสดงได้ว่าเป็นสัจนิรันดร์สรุปได้ว่าสมเหตุสมผล นอกจากนี้ยังสามารถแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ของประพจน์ต่าง ๆ

วิธีการตรวจสอบความสมเหตุสมผลอีกวิธีหนึ่ง โดยใช้แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ของประพจน์ต่าง ๆ ที่กำหนดให้ ซึ่งพัฒนาโดย อารีสโตเติล ท่านได้พิจารณาความสัมพันธ์ของ 4 ข้อความต่อไปนี้

ทุก ๆ ....เป็น...	**เช่น หมอทุกคนสูง**
ไม่มี...เป็น...	**เช่น ไม่มีหมอคนใดสูง**
มีบาง...เป็น...	**เช่น หมอบางคนสูง**
มีบาง...ไม่เป็น...	**เช่น หมอบางคนไม่สูง**

นอกจากนี้ยังพิจารณาถึงประโยคที่จะใช้อีก 2 ประโยค คือ ...เป็น... และ ...ไม่เป็น... ข้อความ 4 ประโยคข้างต้น สามารถเขียนแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้



ทุกสมาชิกของ A เป็นสมาชิกของ B

ทุกสมาชิกของ A ไม่เป็นสมาชิกของ B

มีสมาชิกของ A อย่างน้อยหนึ่งตัวเป็นสมาชิกของ B

มีสมาชิกของ A อย่างน้อยหนึ่งตัวเป็นไม่เป็นสมาชิกของ B

ภาพที่ 2.1 ความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกของ A และ B

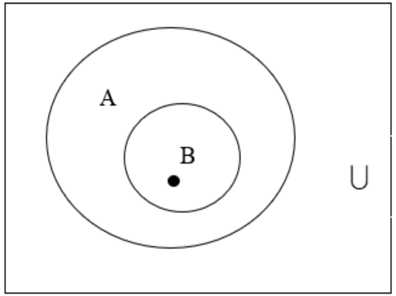
ตัวอย่าง 2.28 **เหตุ** 1. สิงโตทุกตัวสีน้ำตาล

2. สัตว์ที่มีสีน้ำตาลวิ่งเร็ว

ผล สิงโตทุกตัววิ่งเร็ว

วิธีทำ เขียนแผนภาพแสดงข้อความข้างต้นได้ดังนี้

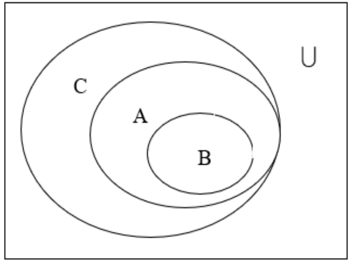
เหตุ 1.สิงโตทุกตัวสีน้ำตาล



วง A แสดงเซตของสัตว์ที่มีสีน้ำตาล

วง B แสดงเซตของสิงโต

เหตุ 2. สัตว์ที่มีสีน้ำตาลมีขนยาว



ให้วง C แสดงเซตของสัตว์วิ่งเร็ว

จะเห็นว่าเซตที่แสดงสัตว์ที่วิ่งเร็ว คลุมสัตว์ที่มีสีน้ำตาล ซึ่งมีสิงโตทุกตัวด้วย

ดังนั้น ข้อสรุปที่ว่า ทุกตัววิ่งเร็วจึงเป็นข้อสรุปที่สมเหตุสมผล

ตัวอย่าง 2.29 พิจารณาข้อความที่กำหนด ว่าผลสรุปสมเหตุสมผลหรือไม่

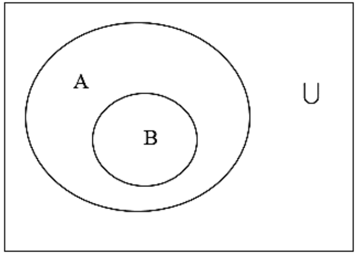
เหตุ 1. นักกีฬาทุกคนมีรูปร่างสูงใหญ่

2. แดงมีรูปร่างสูงใหญ่

ผล แดงเป็นนักกีฬา

วิธีทำ เขียนแผนภาพแสดงข้อความข้างต้นได้ดังนี้

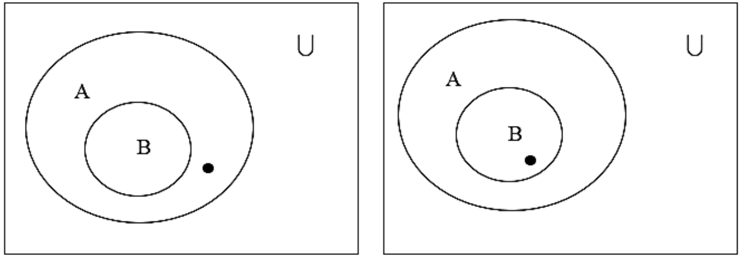
ข้อความ 1.นักกีฬาทุกคนมีรูปร่างสูงใหญ่



วง A แสดงคนมีรูปร่างสูงใหญ่

วง B แสดงนักกีฬา

ข้อความ 2.แดงมีรูปร่างสูงใหญ่



จะเห็นได้ว่า ข้อความที่ 2 แดงมีรูปร่างสูงใหญ่ แดงอาจจะเป็นนักกีฬาหรือไม่ได้เป็นนักกีฬาก็ได้ จะสรุปว่า “แดงเป็นนักกีฬา” ไม่ได้ แสดงว่าข้อสรุปนี้ ไม่สมเหตุสมผล

เอกสารอ้างอิง

ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร. (2547). **หลักการคณิตศาสตร์.** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์.

ธนวัฒน์ ศรีศิริวัฒน์. (2558).**หลักการคณิตศาสตร์.** กรุงเทพฯ.

สมเดช บุญประจักษ์. (2551).**หลักการคณิตศาสตร์.** กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยราชภัฏพระนคร.

สุเทพ จันทร์สมศักดิ์. (2554).**สารัตถะและวิทยวิธีทางคณิตศาสตร์.**กรุงเทพ:สำนักพิมพ์ มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช.